LA MODELACIÓN MATEMÁTICA COMO UN RESULTADO DE APRENDIZAJE TRANSVERSAL EN EL PROCESO FORMATIVO DEL INGENIERO.

Vicente Sandoval Rojas - Universidad Católica de Temuco - vsandova@uct.cl
Emilo Cariaga López - Universidad Católica de Temuco - ecariaga@uct.cl
Valeria Carrasco Zúñiga - Universidad Católica de Temuco - vcarrasc@uct.cl
Soledad Yáñez Arriagada - Universidad Católica de Temuco - syanez@uct.cl
Ciro González Mallo - Universidad Católica de Temuco - cirogm@uct.cl.
Héctor Iturra Chico - Universidad Católica de Temuco - hturra@uct.cl

RESUMEN

En respuesta a necesidades sociales un ingeniero requiere hacer representaciones de la realidad en términos matemáticos, derechamente formular modelos matemáticos. No obstante, existe una gran brecha entre estas competencias y las habilidades que se potencian en sus cursos de matemática. Muchos de estos cursos de matemática poseen todavía un carácter axiomático o se limitan a conceptos abstractos alejados de la actividad humana.
El presente trabajo tiene como propósito presentar a crítica de sus pares una propuesta didáctica que considera el modelamiento matemático como eje central para el desarrollo de la docencia en cursos de matemática y física de las carreras de ingeniería. Su fundamento epistemológico lo constituye el socioconstructivismo. La propuesta postula como hipótesis que un buen entrenamiento en modelado matemático permitiría optimizar tiempo en el logro de resultados de aprendizaje donde el contenido disciplinar sólo constituye un recurso. Se presenta un ejemplo concreto en donde la modelación matemática ilustra la propuesta y potencia el nivel taxonómico de análisis.

PALABRAS CLAVES: Modelación matemática, Socioconstructivismo, Formación del Ingeniero, Resultados de aprendizaje.

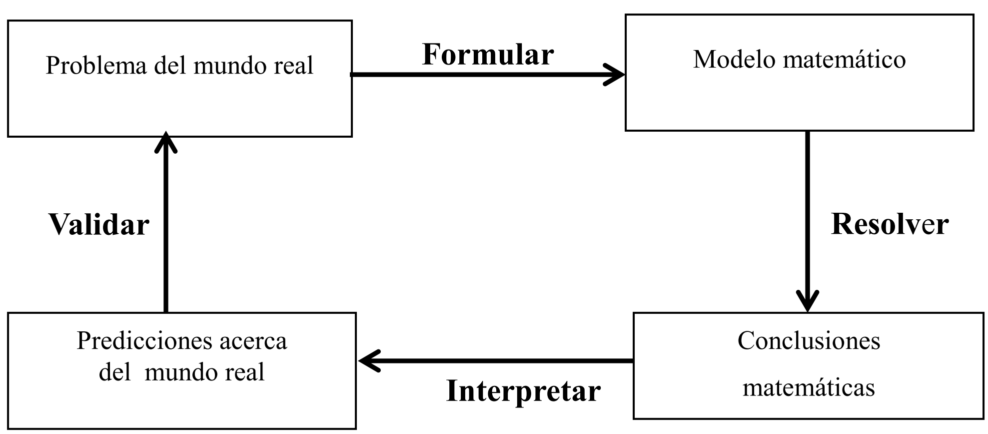
INTRODUCCIÓN

La tendencia internacional de hoy en educación es concebir el aprendizaje como un proceso centrado en el estudiante. Su fundamento epistemológico lo constituye el socio constructivismo (Edith Inés Ruíz Aguirre, *y otros, 2012)*. Este paradigma puede parecer un asunto puramente teórico, sin embargo es fundamental. Es una cosmovisión que nos muestra la manera como una disciplina estudia el mundo seleccionando aquello que le interesa. Se parte de la primacía total del sujeto que adquiere conocimiento y su elaboración la realiza desde su experiencia siempre que éste le atribuya significado y valor. Es una construcción de conocimiento en un contexto. No es un asunto de transferir un aprendizaje de un contexto inicial a uno final. Es un movilizar de todos los recursos cognitivos para responder a un nuevo desafío que el estudiante siente como tal. En consecuencia, no es un tema de transferencia, es un tema de actitud para responder, para resolver una problemática nueva. El estudiante no trabaja sobre el contexto que el profesor le prepara, sino que transforma los conocimientos a partir de la representación que él está haciendo de ese contexto. Desteje, por así decir, lo que el profesor ha preparado. Lo que es determinante para los aprendizajes ya no es tanto el contenido disciplinario, sino las situaciones en las cuales el alumno puede utilizar dicho contenido como "conocimiento viable". En consecuencia, importa fundamentalmente la situación a partir de la cual arranca la representación.

Un modelo, es una abstracción de la realidad que se manifiesta como una representación. Lo interesante es que la representación de una parte del mundo en términos matemáticos le confiere un carácter especial. Por ello la modelación matemática tiene características que le dan una posición notable en cuanto a estructura cognitiva que da origen a un ciclo, en cuyo entrenamiento el profesor debe permanecer vigilante del trabajo del aprendiz. Una posible definición de modelo está dada por:

"Un modelo es una representación provisoria, perfectible e idealizada de una entidad o fenómeno físico. Es una entidad abstracta, una representación simplificada de un hecho, objeto, fenómeno, proceso, realizada con la finalidad de describir, explicar y predecir. Se trata de una construcción humana utilizada para conocer, investigar y comunicar." (Raviolo, Ramírez & López, 2010).

"En un modelo matemático se establece un conjunto de relaciones (de igualdad y/o de desigualdad) definidas en un conjunto de variables que reflejan la esencia de los fenómenos en el objeto de estudio. Formalmente un modelo matemático M es una estructura, donde R es el conjunto de las relaciones y V el conjunto de las variables". (María Lucia Brito y otros 2011). En la siguiente figura se ilustra el proceso de modelado. (María Lucia Brito y otros 2011):



En este trabajo proponemos que el modelado matemático sea un eje central sobre el cual se orienten los resultados de aprendizaje de todos los cursos de ciencias de la ingeniería, en especial los de matemática y física. A modo de ejemplo hacemos referencia al siguiente resultado de aprendizaje en un primer curso de física para el plan común de Ingeniería en la Universidad Católica de Temuco: "Formula modelos físico-matemáticos y en colaboración activa con su equipo de trabajo, resuelve las ecuaciones que de allí se obtienen, en el contexto del diario vivir asociado a la cinemática, dinámica, y leyes de conservación". Este resultado de aprendizaje tributa además a dos competencias, una genérica que es "trabajo en equipo", y otra específica: "aplicar herramientas matemáticas y físicas para la resolución de problemas vinculados al quehacer de la Ingeniería Civil".

El proceso de modelado debería haber sido internalizado por el estudiante desde la enseñanza primaria, pero sabemos que no es así. Ya desde el año 2003 el modelado se incluye en pruebas internacionales como PISA.

Nosotros proponemos como hipótesis que si las prácticas de modelamiento se inician desde los primeros cursos de matemáticas y físicas para ingeniería ganaríamos tiempo porque este entrenamiento permitiría el logro de resultados de aprendizaje en un tiempo menor de lo que ocurre en la actualidad, ya que el contenido de leyes, principios y en general la teoría que gobierna el problema serán sólo recursos cognitivos que ingresan al proceso de modelamiento, que es la instancia de planteamiento de ecuaciones ya sean algebraicas, diferenciales, o integrales.

Considerando situaciones muy sencillas podemos ya desde un primer curso de matemática en contexto recorrer las etapas del modelamiento.
La estrategia general de la modelación matemática que aquí se muestra consta de pasos bien definidos (María Lucia Brito y otros 2011) a los cuales poco hemos agregado, en especial como comentario al punto 7.

1. Definición del problema y sus objetivos. Partir del problema en mínimo grado de complejidad y de lo concreto a lo abstracto.
2. Definición de la teoría que gobierna el problema. Leyes, teoremas, principios.
3. Descripción de la situación física en términos matemáticos. En su momento oportuno Introducción de parámetros, variables auxiliares, y construcción de ecuaciones.
4. Solución matemática del modelo (solución de ecuaciones)
5. Comparación del modelo con la situación real.
6. Estudio de las limitaciones del modelo.
7. Aplicación del modelo e interpretación de los resultados que ofrece. Análisis paramétrico

El último punto merece un comentario especial: a nuestro parecer tiene gran importancia porque es aquí donde se muestra con gran nitidez que el estudiante ha llegado a la etapa de análisis de la que nos habla la Taxonomía de Bloom.

La propuesta ha sido vinculada al Ciclo de Kolb lo que con el apoyo del programa CLAVEMAT: Clase Virtual de Matemática y Tutoría, co-financiado por la Comisión Europea a través del programa ALFA III, dio origen al libro" 50 Ciclos de Kolb y dos Razones para ser Utilizados", con ISBN 978-956-12-9.

Nos proponemos presentar un ejemplo sencillo de modelamiento en un primer curso de algebra en contexto.

DESARROLLO

Congruente con el socioconstructivismo se elige la siguiente situación real de contexto: Estudio del volumen máximo que se puede generar al construir una caja abierta a partir de una placa cuadrada, y otra rectangular de lados distintos extrayendo trozos cuadrados de lado $\boldsymbol{x}$**.**
Ver Figura N° 1.
De lo simple a lo complejo y de lo concreto a lo abstracto: Esta placa se puede comprar dimensionada en el mercado local. Se preguntará a los estudiantes sobre la relevancia del espesor de la placa, acordando con y entre ellos, que el problema, y que en general los problemas, en el modelamiento comienzan a ser tratados en su nivel de mínima complejidad, Por ello se considera despreciable el espesor de placa. No seguiremos avanzando si hay estudiantes que no están convencidos de ello.

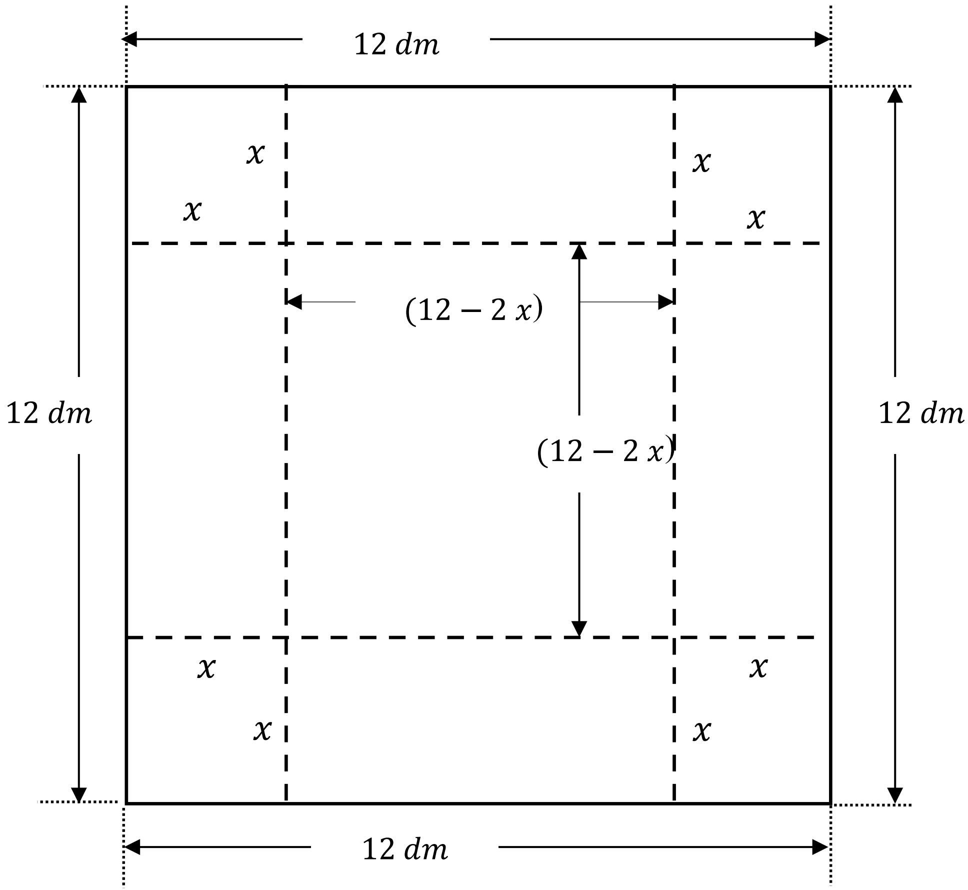


Figura N° 1.

Identificación de teoría que gobierna el problema: Los estudiantes, a través de preguntas, identificarán que la teoría que gobierna el problema es; el álgebra clásica, la geometría clásica, y la deriva de una función de una variable.

Interpretación en términos matemáticos. **El modelo**: Nuevamente, producto de la interacción entre estudiantes, y estudiantes -profesor se ha de realizar la siguiente construcción para el volumen V de la caja, invitando a los alumnos, a que en todo momento, realicen análisis dimensional de las expresiones matemáticas que se van generando:

$$V = (12-2x)^2 x$$
$$V = 4x^3 - 48x^2 + 144x$$
$$\frac{dV}{dx} = 0$$
$$12x^2 - 96x + 144 = 0$$

Esto es:

$x^2 - 8x + 12 = 0$ Cuyas soluciones son $x_1 = 2\ dm$ o $x_2 = 6\ dm$

Aquí se le pide a los estudiantes que discutan sobre el significado de ambas soluciones, ellos son invitados a concluir que x_1 es el único valor que se corresponde con la realidad dado el objetivo.

En la busque de mayor información se piden propuestas de nuevos elementos de análisis, de este modo deberá aparecer la sugerencia de construir un gráfico usando una hoja da calculo Excel u otro recurso informático con ello tendremos la figura N° 2.

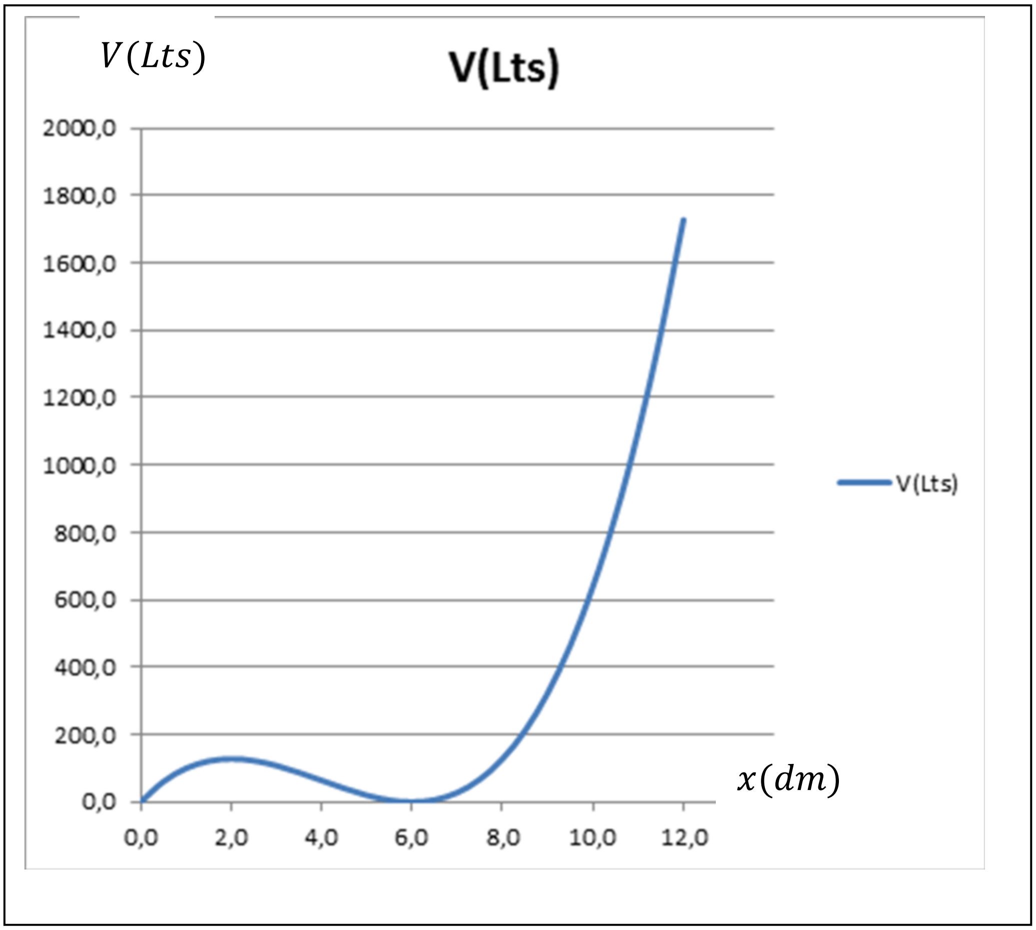


Figura N° 2.

Aquí el mediador interacciona con el estudiante invitándolo a realizar un análisis de la información implícita que entrega la Figura N° 2, intentando siempre favorecer la interacción estudiante-estudiante, profesor-estudiante. Si éste percibe que existen estudiantes cuya Zona de Desarrollo Próximo, de la que nos habla Vygotsky, (Joseph L. Polman, 2010), no le permite estructurar el conocimiento esperado, es el momento propicio para entregar las herramientas cognitivas que se requieren para ampliar la Zona referida.

Los estudiantes deben concluir que la realidad es válida sólo para $0 < x < 6$, y que $x > 6$ es parte del modelo pero no de la realidad.

Ahora preguntamos a los estudiantes qué sucede si quieren construir, o mandar a construir a un artesano, una caja con una placa cuyo lado puede tener cualquier otro valor, y cómo generar un algoritmo o fórmula práctica. ¿Cuáles serían las características de ese algoritmo?, ¿qué ventajas nos ofrecería?, ¿qué análisis podríamos realizar?

La parametrización: Congruente con el socioconstructivismo, la necesidad de parametrizar debe fluir como una construcción del estudiante consecuencia de la interacción a que hemos hecho referencia.

Es así como se introduce el parámetro $\boldsymbol{a}$ que se explicita en la Figura N°3

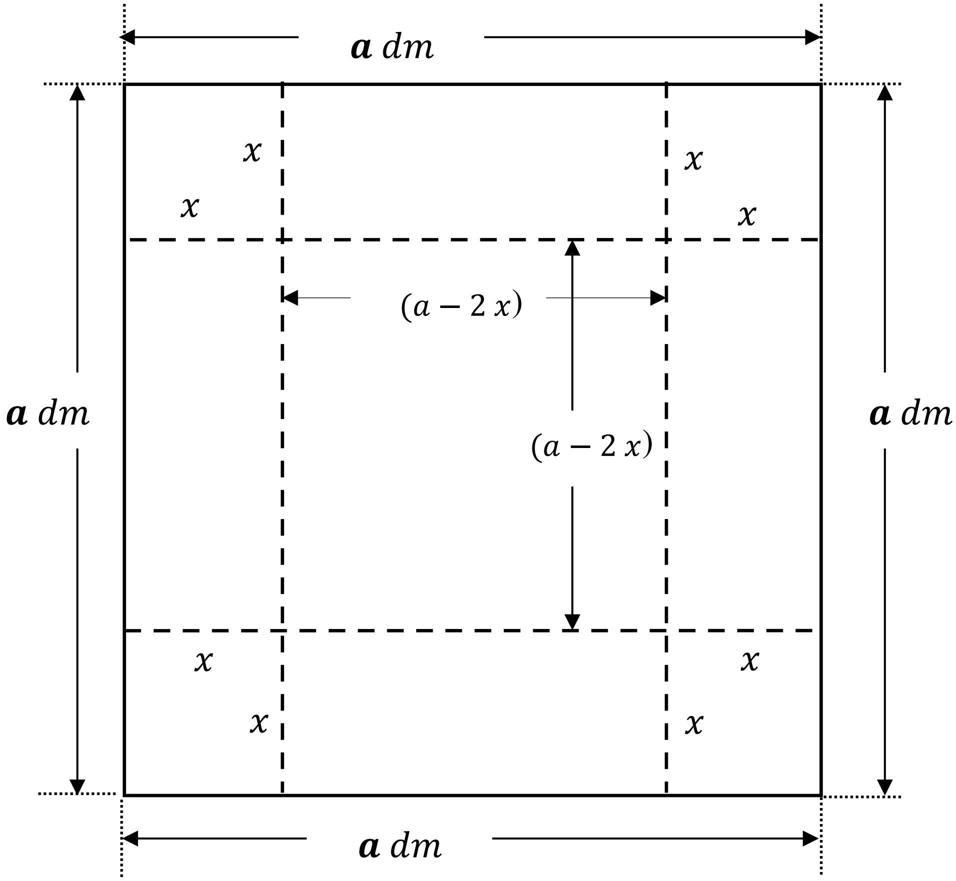


Figura N° 3

Con ello se induce al estudiante a la construcción del siguiente modelo, donde V es el volumen da la caja:

$V = (a - 2x)^2 x$ $V = 4x^3 - 4ax^2 + a^2 x$

Para el volumen máximo deberá ocurrir que:

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

Esto es:

$12x^2 - 8ax + a^2 = 0$

Cuya solución será:

$$x = \frac{8a \mp \sqrt{16a^2}}{24}$$

$$x = \frac{8a \mp 4a}{24}$$

Que genera las soluciones:

$x_1 = \frac{a}{6} \quad y \quad x_2 = \frac{a}{2}$

Nuevamente debemos inducir a que los estudiantes concluyan que x_1 es la única solución que se corresponde con la realidad que en el caso particular visto en que $a = 12\ dm$, y $x_1 = 2dm$, mientras que x_2 es un mínimo y los valores $x > 6$ son inherentes al modelo pero no se corresponden con la realidad

Ganando en generalización. Si la caja es rectangular y saltándonos ahora el caso concreto planteamos el problema paramétricamente. Ver figura N°4

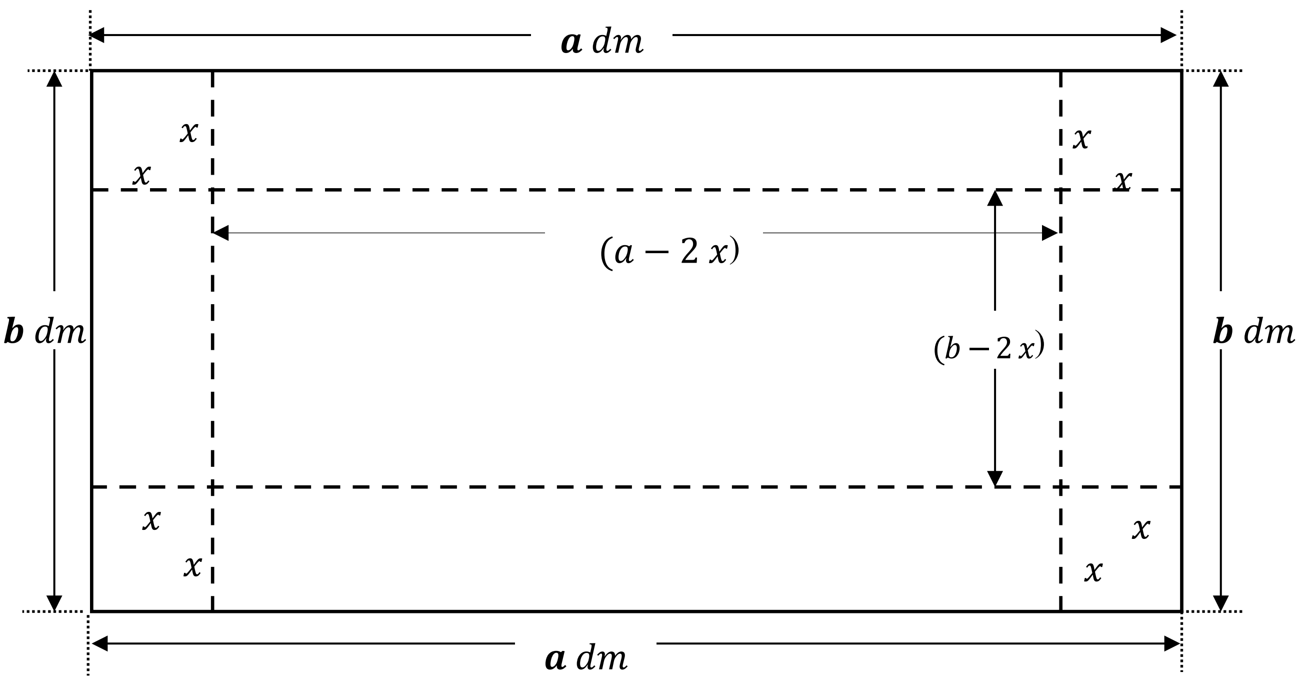


Figura N° 4

$V = (a - 2x)(b - 2x)x$

Esto es:

$V = 4x^3 - 2(a + b)x^2 + abx$

El máximo volumen se presentará cuando:

$\frac{dV}{dx} = 0$

Con ello,

$12x^2 - 4(a + b)x + ab = 0.$

Desde donde:

$$x = \frac{4(a+b) \mp 4\sqrt{(a+b)^2 - 3ab}}{24}$$

$$x = \frac{4(a+b) \mp 4\sqrt{(a+b)^2\left[1 - \frac{3ab}{(a+b)^2}\right]}}{24}$$

Y así

$$x = \frac{4(a+b) \mp 4(a+b)\sqrt{\left[1 - \frac{3ab}{(a+b)^2}\right]}}{24}$$

Finalmente:

$$x = \frac{(a+b)\left[1 \mp \sqrt{\left[1 - \frac{3ab}{(a+b)^2}\right]}\right]}{6}$$

Aquí se les pregunta los estudiantes, ¿de que "habla" el caso en que $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$?. Ellos deben construir la respuesta; tendremos el caso ya visto de una caja construida con una placa cuadrada de lado $\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{dm}$. Y, en consecuencia, obtener los mismos resultados. Ellos por si solos deben deducir que la ecuación anterior nos da:

$$x = \frac{2a\left[1 \mp \sqrt{\left[1 - \frac{3a^2}{4a^2}\right]}\right]}{6}$$

Esto es:

$$x = \frac{a\left[1 \mp \frac{1}{2}\right]}{3}$$

Desde donde obtendrán que:

$$x_1 = \frac{a}{6} \qquad y \quad x_2 = \frac{a}{2}$$

Concluyendo con el caso ya analizado.

Ahora al estudiante se le pueden seguir planteando preguntas como: ¿Es posible que el modelo entregue una sola solución? ¿Cómo sería la gráfica volumen V versus x, ¿qué parte de la gráfica representa la realidad y cuál es sólo parte del modelo?, ¿Qué y cómo se manifiestan los 7 pasos de la modelación expresados en la Introducción?

Proponemos que en ningún momento, en estos ejemplos y otros, que sigan la propuesta el profesor expondrá el problema no sustituyendo al estudiante en el razonamiento, de este modo el trabajo será congruente con la propuesta Socioconstructivista.

CONCLUSIONES.

La propuesta de inducir aprendizajes en torno al modelamiento matemático, de la forma como ha sido planteado; de interacción estudiante-estudiante, estudiante-profesor, es congruente con la teoría socioconstructivista, y además “genera beneficios más allá de la construcción de conocimientos permitiendo al estudiante desarrollar habilidades sociales de comunicación argumentativa, actitudes reflexivas, analíticas, críticas, y de valores de respeto y responsabilidad” (Camarena G. ,2014).

Si bien hay un aumento en las tasas de aprobación en lo cual podrían incidir también otros factores, percibimos que estamos entregando una propuesta que va más allá de la asignatura en la cual ha sido aplicada por cuanto estamos no sólo instalando el modelado matemático como un eje central para la formación del ingeniero, aplicable como un resultado de aprendizaje transversal para cursos posteriores, sino que con ello favorecemos la interacción social generadora de aprendizajes. Los estímulos, al docente que adhiere a la propuesta, en nuestro caso, vienen de comentarios favorables que emiten algunos estudiantes en la encuesta de opinión al desempeño docente que la dirección general de docencia entrega en forma confidencial al profesorado.

La planificación de las actividades de esta propuesta consume un tiempo considerable muy superior al requerido en la preparación de una clase tradicional. No obstante, esto es compensado por la satisfacción que otorga el hecho de saber que se están logrando mejores aprendizajes significativos.

Por otra parte se plantea la hipótesis, que genera un problema abierto, que el aprendizaje y uso del modelado matemático podrá permitir un logro más temprano de resultados de aprendizaje de desempeño, y con ello una optimización temporal en la formación del ingeniero.

AGRADECIMIENTOS

Los autores de este articulo agradecen a: la Dirección General de Docencia (DGD), al Centro de Innovación a la Docencia (CEDID), al Decanato de la Facultad de Ingeniería, al Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas, de la Universidad Católica de Temuco, por la oportunidad presentar la presente propuesta para el beneficio de la formación de estudiantes de ingeniería.

REFERENCIAS:

[1] Joseph L. Polman, 2010. La zona de desarrollo próximo de la identidad en entornos de aprendizaje de oficios Revista de Educación, 353. Septiembre-Diciembre 2010, pp. 129-155.
Revista de Educación, 353. Septiembre-Diciembre 2010, pp. 129-155.

[2] Edith Inés Ruíz Aguirre, *y otros, 2012 "*Aprendizaje colaborativo en ambientes virtuales y sus bases socioconstructivistas como vía para el aprendizaje significativo". Apertura. Revista de Innovación Educativa. Inicio > Vol. 4, Núm. 2 (2012).

[3] Néstor Daniel Roselli, 2011, teoría del aprendizaje colaborativo y teoría de la representación social: convergencias y posibles articulaciones, Revista Colombiana de Ciencias Sociales | Vol. 2 | No 2 | PP. 173-191 | julio-diciembre | 2011 | ISSN: 2216-1201 | Medellín-Colombia

[4] http://www.eici.ucm.cl/descargas/sochedi/Sandoval-Vicente.pdf

[5] Thomas Moore, 2005, FISICA. Seis ideas fundamentales, Edit, Mc Graw Hill

[6] Pilar Garcia Roviera, 2005, Enseñar ciencias en el nuevo milenio, Quintanilla, AdurizBravo,Editores.

[7] La modelación matemática en la formación del Ingeniero. https://www.researchgate.net/publication/271183090_La_modelacion_matematica_en_la_formacion_del_ingeniero

[8] Hugo Kofman- Cristina Cámara. Limitaciones de un Modelo Físico Idealizado. Edición Universidad Nacional de Litoral. Santiago del Estero Santa Fe- Argentina.

[9] V. Sandoval R, F. Jaramillo M. "Proyecto ICERCA. Ciclos Experienciales y una Didáctica para el Fortalecimiento de Competencias Básicas Matemáticas en Estudiantes de Primer año de Ingeniería". Anales XXV Congreso Chileno de Educación en Ingeniería

[10] María Lucía Brito-Vallina, y otros 2011. "El Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros". http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1815594420110002000005

[11] Camarena, G, 2014. " La matemática social en el desarrollo integral de alumno". Innovación Educativa, ISSV 1665-2673, mayo-agosto, 2014