



XXXVII CONGRESO CHILENO DE EDUCACIÓN EN INGENIERÍA 2025
PROYECCIÓN DE LAS TECNOLOGÍAS DIGITALES EN LA FORMACIÓN EN INGENIERÍA:
LA EDUCACIÓN EN MODALIDAD PRESENCIAL, HÍBRIDA Y VIRTUAL
Concepción, 8 al 10 de octubre 2025

CARACTERIZACIÓN DE SUBCAMPOS DE PROBLEMAS DE LA DERIVADA EN LOS LIBROS DE TEXTO DE LOS CURSOS DE INGENIERÍA

Maritza Galindo Illanes, Universidad San Sebastián, maritza.galindo@uss.cl
Denise Chamorro Manríquez, Universidad Católica de la Santísima Concepción,
dchamorro@ucsc.cl

Cristian Herrera Valdés, Universidad San Sebastián, cherrerav@docente.uss.cl
Paulina Torres Sánchez, Universidad San Sebastián, ptorress4@correo.uss.cl
Joaquín Lagos Cartes, Universidad San Sebastián, jlagosc4@correo.uss.cl
Gabriel Salas Coloma, Universidad San Sebastián, gsalasc2@correo.uss.cl

RESUMEN

El objetivo de ese artículo es caracterizar los subcampos de problemas emergentes de las situaciones-problema de la derivada en los libros de texto universitarios propuestos para la formación de ingenieros civiles y comerciales. Para ello, por medio de la noción de configuración epistémica del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos, se analizaron, cualitativamente, trece libros de texto utilizados para la enseñanza de la derivada presentes en los programas de estudio de diferentes universidades chilenas. Como resultado, se observa un abordaje complejo de la derivada con la presencia de 21 subcampos de problemas, aunque no todos libros de texto analizados utilizan los subcampos de problemas de la derivada de manera significativa. Se considera que los hallazgos de esa investigación establecen directrices relevantes para el diseño una propuesta didáctica específica para el aprendizaje de la construcción del significado de la derivada en los cursos de ingeniería.

PALABRAS CLAVE: Enseñanza de la Derivada, Enfoque Ontosemiótico, Ingeniería, Libros de texto.

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas, y específicamente la derivada, constituyen un objeto fundamental en la formación de ingenieros (civiles y comerciales) debido a su rol esencial en el análisis de funciones, optimización de recursos y análisis marginal. Sin embargo, su complejidad y diversas representaciones a menudo ocultan dificultades en la comprensión e interpretación de situaciones, particularmente en microeconomía (García, et al., 2006; Ariza y Llinares, 2009). Esta relevancia ha impulsado numerosos estudios sobre los significados, representaciones y procesos de enseñanza-aprendizaje de la derivada en ingeniería, así como la idoneidad de su significado en los currículos y textos universitarios (Larios y Jiménez, 2022; Rodríguez-Nieto, et al., 2022; Galindo, et al., 2022; Galindo y Breda, 2023; 2024). El Enfoque Ontosemiótico (EOS) de Godino et al. (2007) resalta la importancia de analizar la "plurisignificación" de los objetos matemáticos, siendo las situaciones-problema un elemento central de la complejidad de la derivada.



XXXVII CONGRESO CHILENO DE EDUCACIÓN EN INGENIERÍA 2025 PROYECCIÓN DE LAS TECNOLOGÍAS DIGITALES EN LA FORMACIÓN EN INGENIERÍA: LA EDUCACIÓN EN MODALIDAD PRESENCIAL, HÍBRIDA Y VIRTUAL Concepción, 8 al 10 de octubre 2025

Los libros de texto son recursos influyentes en la construcción del significado de los objetos matemáticos, guiando a los docentes y proporcionando información valiosa para la evaluación y mejora de la enseñanza (Larios y Jiménez, 2022; Alvarado y Batanero, 2008). Investigaciones previas, como la de Pino-Fan et al. (2013), identificaron cinco campos de problemas (CP) de la derivada en textos, incluyendo tangentes, tasas de cambio, máximos y mínimos, análisis gráfico y reglas de derivación. Galindo y Breda (2023) adoptaron estos CP para libros de ingeniería comercial en Chile, aunque sin un análisis detallado de la complejidad a través del refinamiento de las situaciones-problema.

En este contexto, la presente investigación busca ampliar los estudios previos (Pino-Fan et al., 2013; Galindo y Breda, 2023) para caracterizar los subcampos de problemas de las situaciones-problema de la derivada en libros de texto universitarios utilizados en la formación de ingenieros civiles y comerciales.

DESARROLLO

• MARCO TEÓRICO:

La investigación se fundamenta teóricamente en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), desarrollado por Godino et al. (2007; 2019). Desde esta perspectiva, la noción de complejidad del objeto matemático y su articulación constituyen elementos esenciales para comprender su significado. Tal como explican Font et al. (2013), dicha complejidad se concibe como una pluralidad de significados, emergentes de una visión pragmatista: el significado de un objeto matemático se define en función de las prácticas en las que participa significativamente.

Este enfoque reconoce que los objetos matemáticos emergen dentro de sistemas de prácticas que resuelven determinados campos de problemas (CP), y que, con el tiempo, estos objetos son reinterpretados y ampliados dentro de nuevos programas de investigación. Así, cada programa aporta nuevas formas de uso, representación, procedimientos, y relaciones, lo que enriquece progresivamente el significado del objeto matemático.

El EOS concibe la actividad matemática como una práctica humana situada, que se desarrolla a través de procesos tales como problematización, conjetura, argumentación o definición, enmarcados en situaciones-problema. En este contexto, se identifican seis objetos primarios: situaciones-problema, lenguaje, procedimientos, conceptos-definición, proposiciones y argumentos, los cuales se activan mediante procesos como la comunicación, la elaboración de algoritmos, y la argumentación, aplicando la dualidad proceso-producto.

En relación con el objeto derivada, Pino-Fan et al. (2011) caracterizan su complejidad histórica mediante nueve configuraciones de objetos primarios: 1)Tangente en la matemática griega. 2)Variación en la Edad Media. 3)Métodos algebraicos para hallar tangentes. 4)Concepciones cinemáticas. 5)Ideas intuitivas de límite para extremos. 6)Métodos infinitesimales. 7)Cálculo de fluxiones. 8)Cálculo de diferencias. 9)Derivada como límite



Estas configuraciones permiten, según Pino-Fan et al. (2013), una reconstrucción del significado global de la derivada, utilizada para evaluar su representatividad en el currículo de Bachillerato en México, considerando tanto el plan de estudios como los libros de texto.

Para este análisis, se adopta dentro del EOS la tipología de situaciones-problema como objeto matemático primario central. Estas son entendidas como situaciones fenomenológicas generadoras de prácticas matemáticas, y se categorizan en campos de problemas (CP). Así, el estudio examina la presencia de subcampos de problemas de la derivada en una muestra de libros de texto, estructurándose según las cinco categorías de CP propuestas en Pino-Fan et al. (2013).

• **METODOLOGÍA:**

Los libros de texto son considerados un recurso muy importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los docentes utilizan los textos presentes en las bibliografías de los programas de estudios para planificar e implementar su trabajo de aula (Galindo y Breda, 2023), por lo que influyen la enseñanza del docente y el aprendizaje de los estudiantes, adquiriendo un rol fundamental en la determinación del significado pretendido.

De Galindo y Breda (2023), se consideraron 13 libros de texto de matemática orientados a ingeniería, que permiten contar con un amplio espectro del significado de la derivada. Los libros de texto se clasifican en: 6 textos de matemática aplicada a ingeniería comercial y 7 textos clásicos de enseñanza del cálculo para ingeniería civil.

Los pasos que se siguieron para el análisis del contenido en libros de texto son los establecidos por Alvarado y Batanero (2008), que se resumen en:

- ✓ Determinar los textos de matemática universitaria a analizar.
- ✓ Seleccionar los capítulos, mediante una lectura detallada de los que tratan el tema.
- ✓ Determinar los elementos de significado, específicamente los CP, a partir del análisis epistémico.
- ✓ Elaborar tablas comparativas que recogen los CP en los distintos libros seleccionados.
- ✓ Realizar un análisis comparativo de contenido.
- ✓ Presentar las conclusiones, mediante el análisis descriptivo de la información obtenida.

Con base en los 13 libros de texto, se identificó la organización de los contenidos, seleccionando los capítulos que trataban la derivada. A continuación, se analizó la presencia de los CP del estudio histórico realizado por Pino-Fan et al. (2013), los que se resumen en: A) CP sobre tangentes; B) CP sobre cálculo de tasas instantáneas de cambio (se refiere específicamente al “cociente” entre dos cantidades de magnitud); C) CP sobre tasas de variación instantánea (se refiere al cociente entre dos números sin hacer referencia a cantidades de magnitud, se le conoce comúnmente como límite del cociente incremental); D) CP sobre aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, etc., y E) CP sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación.



XXXVII CONGRESO CHILENO DE EDUCACIÓN EN INGENIERÍA 2025
PROYECCIÓN DE LAS TECNOLOGÍAS DIGITALES EN LA FORMACIÓN EN INGENIERÍA:
LA EDUCACIÓN EN MODALIDAD PRESENCIAL, HÍBRIDA Y VIRTUAL
Concepción, 8 al 10 de octubre 2025

Mediante el análisis de los CP en los textos se identificaron 21 subcampos de problemas de Galindo y Breda (2023) (Tabla 2). Este primer análisis posibilita mostrar y ejemplificar la emergencia de cada subcategoría de CP y realizar una caracterización detallada de los CP de la derivada en los libros de texto.

Tabla 1. Campos de problemas (CP), Identificador (ID) y descripción del campo de problema.

CP	ID	DESCRIPCIÓN DEL CAMPO DE PROBLEMA
A	A1	Cálculo de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, utilizando la noción cartesiana
	A2	Cálculo de la pendiente de recta tangente a una curva en un punto, utilizando el triángulo de Leibniz
	A3	Cálculo de la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto, utilizando derivada
	A4	Cálculo de la pendiente de una recta tangente a una curva para obtener una razón de cambio instantánea
B	B1	Cálculo de tasas instantáneas de cambio marginal
	B2	Crecimiento poblacional
	B3	Cálculo de la rapidez instantánea
	B4	Razones de cambio (o tasas de cambio) relativas y porcentuales para funciones económicas
	B5	Razones de cambio aplicadas a otras áreas del conocimiento
C	C1	Tasas de variación instantánea de funciones reales
	C2	Razones de cambio (o tasas de cambio) relativas y porcentuales para funciones reales
D	D1	Análisis del gráfico de funciones (monotonía) reales y de áreas del conocimiento diferentes a la económica
	D2	Análisis del gráfico de funciones económicas (monotonía)
	D3	Cálculo de máximos y mínimos locales en problemas aplicados de economía utilizando criterio de la primera o segunda derivada para extremos relativos
	D4	Cálculo de máximos y mínimos locales en funciones reales y de áreas del conocimiento diferentes a la económica, utilizando criterio de la primera o segunda derivada para extremos relativos
	D5	Extremos absolutos en un intervalo cerrado
	D6	Análisis de concavidad de funciones reales y económicas
E	E1	Cálculo de derivadas de orden superior
	E2	Cálculo de derivadas implícitas
	E3	Método de Newton para aproximación de raíces de polinomios
	E4	Regla de L'Hôpital para el cálculo de límites

Fuente: Galindo y Breda (2023)



RESULTADOS:

A continuación, se presentan los resultados del análisis realizado, proporcionando ejemplos concretos que clarifican los diferentes subcampos de problemas encontrados de los CP sobre la derivada en libros de texto.

A: Campos de problemas sobre tangentes. Para el análisis de la presencia de este CP es esencial prestar atención a la construcción de recta tangente a una curva que consideran los textos del concepto. Resulta de interés identificar si el tipo de actividades, ejercicios y/o ejemplos presentes en los textos, permiten ampliar la noción euclidiana de la recta tangente a la cartesiana y a la Leibniziana, teniendo en cuenta los métodos infinitesimales, ya que el cálculo lleva a los estudiantes a los niveles más altos de generalidad de la tangente (Santi, 2011). A continuación, se consideran ejemplos de los 4 subcampos de este campo de problemas presentes en los textos, cuyo objetivo es comprender la interpretación geométrica de la derivada, considerando previamente el concepto de recta tangente (Galindo y Breda, 2023; 2024).

A1: Cálculo de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, utilizando la noción cartesiana (aproximación por rectas secantes).

A2: Cálculo de la pendiente de recta tangente a una curva en un punto, utilizando el triángulo de Leibniz.

A3: Cálculo de la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto, utilizando derivada.

A4: Cálculo de la pendiente de una recta tangente a una curva para obtener una razón de cambio instantánea.

B: Campos de problemas sobre cálculo de tasas instantáneas de cambio. Para comprender y modelar determinadas situaciones económicas resulta esencial que los estudiantes puedan extraer la información que proporcionan las representaciones gráficas de las relaciones entre las variables y la medida de la variación de cambio (Ariza y Llinares, 2009). Por este motivo, es importante que se considere la idea de variación y cambio cuando se está construyendo el concepto derivada (Zambrano et al., 2019), así como incorporar elementos variacionales y otorgar significado a los distintos elementos relacionados a la variación (Vrancken, Engler, 2014).

Para establecer las tasas instantáneas de cambio, entendidas como el “cociente” entre dos cantidades de magnitud, se utiliza inicialmente una razón de cambio promedio, por ejemplo,

$$v_{prom} = \frac{\text{Desplazamiento}}{\text{Longitud del intervalo de tiempo}}$$
 (razón de cambio promedio con respecto al tiempo), la cual se desarrolla tabularmente con el fin de introducir la notación incremental y posteriormente la notación diferencial. Finalmente se representa la derivada como $s'(t) = \frac{ds}{dt}$ (Inglada y Font, 2003). A continuación, se consideran ejemplos de los 5 subcampos de este campo de problemas, que permitirán comprender y modelar determinadas situaciones aplicadas.



XXXVII CONGRESO CHILENO DE EDUCACIÓN EN INGENIERÍA 2025
PROYECCIÓN DE LAS TECNOLOGÍAS DIGITALES EN LA FORMACIÓN EN INGENIERÍA:
LA EDUCACIÓN EN MODALIDAD PRESENCIAL, HÍBRIDA Y VIRTUAL
Concepción, 8 al 10 de octubre 2025

B1: Cálculo de tasas instantáneas de cambio marginal (costo marginal, ingreso marginal, utilidad marginal, productividad marginal, rendimiento marginal, tasa de impuesto marginal y propensión marginal al ahorro y al consumo)

B2: Crecimiento poblacional.

B3: Cálculo de la rapidez instantánea.

B4: Razones de cambio (o tasas de cambio) relativas y porcentuales para funciones económicas. (tasa porcentual del cambio de ingreso en función del cambio porcentual de las unidades o del precio, tasa de cambio porcentual de la cantidad en función del cambio porcentual en el precio (elasticidad de la demanda)).

B5: Razones de cambio aplicadas a otras áreas del conocimiento.

C: Campos de problemas sobre tasas de variación instantánea. Este CP se refiere al cociente entre dos números sin hacer referencia a cantidades de magnitud. Se le conoce comúnmente como límite del cociente incremental

C1: Tasas de variación instantánea de funciones reales

C2: Razones de cambio (o tasas de cambio) relativas y porcentuales para funciones reales.

D: Campos de problemas sobre aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, etc

D1: Análisis del gráfico de funciones (monotonía) reales y de áreas del conocimiento diferentes a la económica.

D2: Cálculo de máximos y mínimos locales en problemas aplicados de economía utilizando criterio de la primera o segunda derivada para extremos relativos.

E: Campos de problemas sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación.

E1: Cálculo de derivadas de orden superior.

E2: Cálculo de derivadas implícitas.

E3: Método de newton para aproximación de raíces de polinomios. Construcción mediante rectas tangentes.

E4: Regla de L'Hôpital para el cálculo de límites.



CONCLUSIONES:

El estudio subraya la **complejidad y la riqueza de los campos de problemas de la derivada** presentes en los libros de texto, identificando 21 subcampos dentro de cinco categorías (Pino-Fan et al., 2013). Se destaca la inconsistencia en la aplicación significativa de estos subcampos en todos los textos. Específicamente, es crucial que los textos de ingeniería comercial incorporen el CP sobre tangentes utilizando el triángulo de Leibniz, dada su relevancia en el área. Asimismo, los textos de matemáticas para ingenieros civiles deberían enfatizar las **razones de cambio relativas y porcentuales** en diversas especialidades.

La información derivada de esta investigación es fundamental para el diseño de propuestas didácticas que mejoren la comprensión de la derivada en la formación ingenieril, ampliando las perspectivas de Galindo Illanes et al. (2023). Esto implica considerar, según el contexto, el uso de tecnología, la implementación de un orden creciente de dificultad en los problemas y la integración de diferentes representaciones.

REFERENCIAS

- Alvarado, H., & Batanero, C. (2008). Significado del teorema central del límite en textos universitarios de probabilidad y estadística. *Estudios Pedagógicos*, 34(2), 7–28. <https://doi.org/10.4067/S0718-07052008000200001>
- Ariza, A., & Llinares, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económico en estudiantes de bachillerato y universidad. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 121–136. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3667>
- Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97–124. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0>
- Galindo Illanes, M. K., & Breda, A. (2023). Significados de la derivada en los libros de texto de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 37(75), 271–295. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n75a13>
- Galindo Illanes, M. K., & Breda, A. (2024). Processo de instrução do derivado aplicado a estudantes de engenharia de negócios no Chile. *Uniciencia*, 38(1), 303–325. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.17>
- Galindo Illanes, M. K., Breda, A., Chamorro Manríquez, D. D., & Alvarado Martínez, H. A. (2022). Analysis of a teaching learning process of the derivative with the use of ICT oriented to engineering students in Chile. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(7), em2130. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12162>



XXXVII CONGRESO CHILENO DE EDUCACIÓN EN INGENIERÍA 2025
PROYECCIÓN DE LAS TECNOLOGÍAS DIGITALES EN LA FORMACIÓN EN INGENIERÍA:
LA EDUCACIÓN EN MODALIDAD PRESENCIAL, HÍBRIDA Y VIRTUAL
Concepción, 8 al 10 de octubre 2025

Galindo Illanes, M. K., Breda, A., & Alvarado Martínez, H. (2023). Diseño de un proceso de enseñanza de la derivada para estudiantes de Ingeniería Comercial en Chile. *Paradigma*, 44(2), 321–350. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p321-350.id1386>

García, L., Azcárate, C., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 85–116. Recuperado el 17 de septiembre de 2024, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362006000100005&lng=es&tlng=es

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in Mathematics education. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 39(1–2), 127–135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 37–42.

Hoffmann, L., Bradley, G., & Rosen, K. (2006). *Cálculo para administración, economía, ciencias biológicas y sociales* (8ª ed.). McGraw-Hill.

Inglada, N., & Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental. In *XIX Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp.1-18). Córdoba.

Larios, V., & Jiménez, A. R. (2022). Significados parciales de la derivada en libros universitarios en la formación de ingenieros. *Praxis & Saber*, 13(33), e12274. <https://doi.org/10.19053/22160159.v13.n33.2022.12274>

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, 34(2), 123–150.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa Revista Do Programa De Estudos Pós-Graduados Em Educação Matemática*, 13(1), 141–178. Recuperado de <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4423>

Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F., & Font, V. (2022). Nueva mirada para analizar las conexiones desde dos lentes teóricos: la teoría ampliada de las conexiones matemáticas y el enfoque ontosemiótico. In Lugo-Armenta, J. G., Pino-Fan, L. R., Pochulu, M., & Castro, W. F. (Eds.), *Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos: Investigaciones y Desarrollos en América Latina* (pp. 193–219). Editorial Universidad de Los Lagos.

Santi, A. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2–3), 285–311. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9296-8>



XXXVII CONGRESO CHILENO DE EDUCACIÓN EN INGENIERÍA 2025
PROYECCIÓN DE LAS TECNOLOGÍAS DIGITALES EN LA FORMACIÓN EN INGENIERÍA:
LA EDUCACIÓN EN MODALIDAD PRESENCIAL, HÍBRIDA Y VIRTUAL
Concepción, 8 al 10 de octubre 2025

Vrancken, S., & Engler, A. (2014). Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 449–468. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a22>

Zambrano, R., Escudero, D. y Medrano, R. (2019). Una introducción al concepto de derivada en estudiantes de bachillerato a través del análisis de situaciones de variación, una introducción al concepto de derivada en estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, 31(1), 258–280. <https://doi.org/10.24844/EM3101.10>