# EVALUACIÓN DE LA VISUALIZACIÓN PARA EL ANÁLISIS CUALITATIVO DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Matías Pavez Bravo, Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera, matias.pavez@ufrontera.cl
Mauricio Godoy Molina, Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera, mauricio.godoy@ufrontera.cl
María Elisa Valdés Vásquez, Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera, maria.valdes@ufrontera.cl

## RESUMEN

Este estudio analiza la competencia de visualización matemática en estudiantes de segundo año de Ingenierías Civiles que cursan la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) en la Universidad de La Frontera. La presente investigación corresponde a la primera fase de un proyecto que considera la evolución de la competencia de visualización aplicada a la interpretación e inferencia de propiedades de EDOs. Presentamos los hallazgos de un diagnóstico inicial aplicado a 147 estudiantes (*n=147*) mediante un cuestionario de 10 preguntas sobre precálculo, cálculo diferencial, álgebra lineal y una pregunta extra relativa al concepto de atractor. Los resultados evidencian un logro intermedio (65–70%), con fortalezas en interpretación (79%) y conversión gráfico → simbólico (76%), pero debilidades en inferencia (59%) y conversión simbólico → gráfico (62%). Estos hallazgos subrayan la necesidad de fortalecer la visualización mediante experiencias que promuevan razonamientos más profundos.

**PALABRAS CLAVE:** Visualización, Ecuaciones diferenciales, Análisis cualitativo, Formación inicial de ingeniería, Semiótica.

## INTRODUCCIÓN

La discusión de cambios profundos a los currículos de cursos de matemática avanzada se ha mantenido activa por décadas en ámbitos educacionales y académicos (para un ejemplo actual, ver la columna de Darling-Hammond (2025)). Son innumerables los equipos de matemáticas y matemáticos que han propuesto diversos cambios a los énfasis, objetivos y metodologías de la enseñanza del cálculo y el precálculo, álgebra lineal, geometría analítica, ecuaciones diferenciales, probabilidades, estadística, entre otros.
Al respecto de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), el estudio de soluciones desde un punto de vista cualitativo se remonta a fines del s.XIX, cuando H. Poincaré analizó características geométricas relevantes de trayectorias que resuelven sistemas de ecuaciones diferenciales (Poincaré, 1881). Este paradigma alternativo fue aceptado rápidamente en la investigación matemática, la cual, hasta ese entonces, había concentrado todos sus esfuerzos en crear trucos *ad-hoc* para resolver diferentes tipos de EDOs. En la formación de matemática pura y aplicada, el cambio de resolver EDOs a estudiarlas usando herramientas rigurosas de análisis cualitativo explotó durante la década de 1970 (Arnol'd, 1973; 1978, Hirsch & Smale, 1974).
El uso de herramientas de análisis cualitativo demanda la puesta en marcha de una actividad cognitiva superior relacionada con la *visualización matemática*, a fin de que el interés en la resolución de las EDOs no sean solo los resultados numéricos o simbólicos que se pueden obtener de ellas, sino aún más, la interpretación de estos resultados que promuevan un conocimiento más profundo al respecto de lo que se estudia y sus implicancias.

Este es el caso de los planes de formación de Ingenierías Civiles en la mayoría de las universidades que integran cursos de EDOs desde un punto de vista cualitativo. El análisis/inferencia e interpretaciones a partir de representaciones gráficas, diagramas o registros simbólicos se vuelve central a la hora de tomar de decisiones. Es por lo anterior que el desarrollo de la visualización matemática se evidencia como una oportunidad para mejorar los aprendizajes en la formación inicial de ingeniería, además de fortalecerla como competencia, cuyo valor se manifiesta en conexiones profundas entre los objetos matemáticos y sus diferentes representaciones para la resolución de problemas, que lleva consigo una diversidad de actividades de un alto nivel cognitivo, precisamente vinculadas con el rol profesional: realizar inferencias a partir de datos o gráficos, establecer relaciones entre diferentes representaciones de objetos, realizar interpretaciones adecuadas y bien formuladas de datos presentados en otros sistemas semióticos y establecer estrategias de resolución realizando conversiones entre diferentes registros de representación (Pepin *et al*., 2021). Para efectos de este trabajo, entenderemos teóricamente la *visualización* (Arcavi, 2003) como:

"*el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre dibujos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, sobre papel o con herramientas tecnológicas, con el fin de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y avanzar en la comprensión*" (Arcavi, 2003, p. 217)

Diversos estudios ofrecen una perspectiva interesante respecto del desarrollo de la visualización en estudiantes, cuyo beneficio es transversal a los temas de matemática, tales como el Cálculo (Mejías-Ramos & Weber, 2019), la Geometría (Kobiela & Lehrer, 2019) e incluso la Estadística (Binder *et al*., 2015). El desarrollo de la visualización no solo mejora la comprensión conceptual de los objetos matemáticos, sino que potencia otro tipo de competencias que son clave para la formación matemática de cualquier ingeniera e ingeniero, tales como: la modelación matemática, la comunicación y la toma de decisiones basadas en criterios científicos (Povilianskas & Tsosie, 2023). Estos estudios dan cuenta que el desarrollo de la visualización es beneficioso para maximizar los resultados de aprendizaje en la disciplina de matemáticas (Schoenherr *et al*., 2024) y que se alinea con enfoques de enseñanza centrados en el aprendizaje activo, la resolución auténtica de problemas y la integración de nuevas tecnologías, pudiendo actuar como mediador para facilitar la transición y promoción hacia un aprendizaje más profundo (Guzman *et al*., 2021). Es a partir de esto que nos cuestionamos sobre el nivel de visualización matemática en estudiantes de ingenierías civiles que cursan la asignatura de EDOs desde un punto de vista cualitativo y la evolución de esta competencia a lo largo del curso.

## REGISTROS DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

En la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, es crucial diferenciar entre el objeto matemático y las representaciones semióticas que lo materializan. Un objeto matemático, como una función o una figura geométrica, es un concepto abstracto. Su representación, por otro lado, es la forma observable, física o simbólica que utilizamos para comunicarnos y trabajar con ese objeto. Según Duval (1993), ignorar esta distinción puede llevar a una pérdida de comprensión y a que los conocimientos se vuelvan inertes o inutilizables fuera del contexto de aprendizaje. La actividad matemática es, en esencia, una semiosis, es decir, un proceso continuo de producción y transformación de representaciones semióticas (Duval, 2004).
Los registros de representación semiótica son sistemas que permiten la producción y transformación de representaciones. Para Duval (1993), un registro es inherentemente un

sistema semiótico porque no solo produce signos, sino que también permite operaciones cognitivas sobre ellos. Las dos funciones cognitivas principales asociadas a la actividad semiótica son el tratamiento y la conversión (Duval, 2004):

- Tratamiento (o "Transformación interna"): Se refiere a la transformación de una representación dentro del mismo registro. Por ejemplo, simplificar una fracción, expandir una expresión algebraica o rotar una figura geométrica en un plano. Esta función es clave para operar con la información de manera eficiente.
- Conversión (o "Transformación externa"): Consiste en la transformación de una representación de un registro a otro. Este proceso es fundamental para la comprensión integrativa y la transferencia de conocimiento. Por ejemplo, pasar de la representación algebraica de una función de una variable (*e.g.* $y=2x+1$) a su representación gráfica en un plano cartesiano (*e.g.* una recta).

Duval postula que el dominio de la conversión de registros se evidencia como un aspecto crítico en el aprendizaje, ya que el conocimiento que no puede ser transferido entre registros se considera de tipo mono-registro y es un obstáculo mayor para la comprensión profunda (Duval, 2004). De acuerdo con lo anterior, la visualización en Matemática tendría su vínculo con la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (Duval, 1993) en la medida en que las representaciones utilizadas, sus tratamientos, sus conversiones en otros registros semióticos y el encadenamiento de estas funciones cognitivas como proceso y su producto final permiten evidenciar cómo infieren o interpretan informaciones los sujetos en matemática, lo cual es la manifestación explícita de la visualización.

## CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA

Esta investigación se enmarca en un proyecto de un semestre de duración, dividido en tres fases: (1) La aplicación de un diagnóstico inicial de visualización para identificar las condiciones de entrada de las y los estudiantes de las ingenierías civiles al curso de EDOs, (2) el desarrollo de la competencia de visualización a partir de laboratorios que integran el uso de Mathematica® y finalmente, (3) el análisis y contraste del diagnóstico con los resultados obtenidos de la aplicación de evaluaciones posteriores, a fin de evaluar el desarrollo de la competencia. Cabe señalar que, respecto de las etapas desarrolladas del proyecto vinculado a este artículo, se presentan los resultados obtenidos de la fase (1), relacionada con la aplicación del diagnóstico de entrada para cuantificar el logro de la competencia de visualización previo al inicio del curso.
El diagnóstico corresponde a un cuestionario de 10 preguntas de cuatro alternativas cada una y que abordan diferentes temas, considerando conocimientos previos para afrontar la asignatura de EDOs, particularmente aquellos conocimientos relacionados con funciones (pre-cálculo), cálculo diferencial (derivadas, series) y álgebra lineal (determinantes, transformaciones lineales), para lo cual se identifican potenciales dificultades y errores vinculados con los conocimientos previos. El diagnóstico completo se puede encontrar en el siguiente enlace.
La distribución de preguntas según dimensión, habilidad cognitiva asociada entre inferir e interpretar y conversión de registro: simbólico a gráfico (SG) o gráfico a simbólico (GS), figuran en la Tabla 1.
La habilidad de *Inferir* en torno a la visualización corresponderá para nosotros la acción de obtener alguna información o conclusión a partir de otra, mediante la puesta en marcha de algún razonamiento adecuado, favoreciendo su comprensión a través del cambio de registro de repre-

Tabla 1: Distribución de preguntas por dimensión, habilidad y tipo de conversión

| Pregunta | Dimensión | Habilidad | Tipo de conversión |
|---|---|---|---|
| P1 | Cálculo Diferencial | Interpretar | Gráfico → Simbólico (GS) |
| P2 | Precálculo | Interpretar | Gráfico → Simbólico (GS) |
| P3 | Cálculo Diferencial | Inferir | Gráfico → Simbólico (GS) |
| P4 | Precálculo | Interpretar | Simbólico → Gráfico (SG) |
| P5 | Precálculo | Inferir | Simbólico → Gráfico (SG) |
| P6 | Álgebra Lineal | Interpretar | Gráfico → Simbólico (GS) |
| P7 | Álgebra Lineal | Inferir | Gráfico → Simbólico (GS) |
| P8 | Álgebra Lineal | Inferir | Simbólico → Gráfico (SG) |
| P9 | Cálculo Diferencial | Inferir | Simbólico → Gráfico (SG) |
| P10 | Pregunta extra (EDOs) | Interpretar | Gráfico → Simbólico (GS) |

Fuente: Elaboración propia

sentación semiótica. Por su parte, la habilidad de *Interpretar* en torno a la visualización, corresponderá para nosotros la acción de explicar una misma información que puede ser entendida desde diferentes modos o desde puntos de vista distintos, según la conversión de registro semiótica que se realice.

En cuanto a la evaluación del diagnóstico, las alternativas formuladas para cada pregunta se valoran por desarrollos intermedios realizados. Es decir, se asigna una respuesta considerada "*la más adecuada*" o correcta (1 punto), luego opciones que son parcialmente correctas pero que contienen errores (0.5 puntos) y finalmente, una alternativa que es inadecuada/incorrecta. De esta manera, se pretende cuantificar la competencia de visualización en una escala de 0 a 10.

En este diagnóstico participaron 147 estudiantes (*n=147*) de segundo año de las ingenierías civiles de la Universidad de La Frontera que inscribieron la asignatura durante el segundo semestre de 2025. Además de presentar los resultados generales de la aplicación del diagnóstico, se seleccionan dos preguntas, P7 y P10, para analizar en mayor profundidad las decisiones de las y los participantes, así como las razones que creemos que son plausibles respecto de las elecciones realizadas. En el caso de P10, la pregunta considerada como pregunta extra (ver Tabla 1), es relativa principalmente al contenido del programa de asignatura de EDOs, donde se aborda la noción de *atractor* (ver sección Resultados para más detalles de la pregunta). En este caso, se trata de abordar esta noción de forma intuitiva.

Por otra parte, la pregunta P7 representa para nosotros uno de los temas clave del álgebra lineal vinculado al estudio de EDOs (valores y vectores propios).

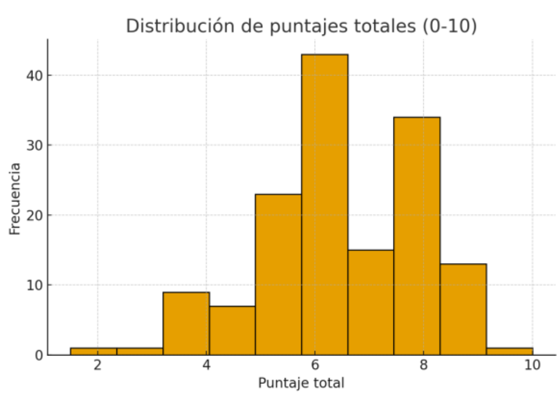



Figura 1: Distribución de puntajes obtenidos por participantes en escala de 0 a 10.
Fuente: Elaboración propia

## RESULTADOS

Los resultados de la aplicación del diagnóstico de entrada (ver Figura 1) dan cuenta que las y los estudiantes ingresan al curso de EDOs con un dominio medio (65–70%), con un comportamiento asimétrico negativo en torno a la competencia de visualización, con debilidades en la habilidad de *inferencia* y en la conversión de registro simbólico → gráfico que se detallan a continuación.
Al analizar las preguntas por nivel de logro, se identifica que las preguntas que alcanzan mayor logro (en orden decreciente y >50%) son P10 correspondiente a la pregunta extra, P1 (80.95%) asociada a Cálculo Diferencial y P6 (68.03%) de Álgebra Lineal (ver Tabla 2). Por su parte, las preguntas que obtienen un nivel de logro más bajo corresponden a las preguntas P8 (19.73%), P7 (30.61%), ambas de la dimensión de Álgebra Lineal y P9 (34.69%) de Cálculo Diferencial.

Tabla 2: Nivel de logro (%) por pregunta del Diagnóstico de entrada

| Pregunta | Correctas (%) | Parcialmente correctas (%) | Incorrectas (%) | En blanco (%) |
|---|---|---|---|---|
| P1 | 80.95 | 18.37 | 0.68 | 0.0 |
| P2 | 38.78 | 36.73 | 17.01 | 7.48 |
| P3 | 45.58 | 24.49 | 23.81 | 6.12 |
| P4 | 38.78 | 56.46 | 2.72 | 2.04 |
| P5 | 44.9 | 34.01 | 11.56 | 9.52 |
| P6 | 68.03 | 21.09 | 8.16 | 2.72 |
| P7 | 30.61 | 44.9 | 17.01 | 7.48 |
| P8 | 19.73 | 54.42 | 14.97 | 10.88 |
| P9 | 34.69 | 30.61 | 23.81 | 10.88 |
| P10 | 85.71 | 2.04 | 4.08 | 8.16 |

Fuente: Elaboración propia

## ANÁLISIS EN CUANTO A DIMENSIONES

Considerando el promedio obtenido en cada dimensión por estudiante y luego el promedio de los participantes por dimensión: Cálculo Diferencial (P1, P3, P9), Precálculo (P2, P4, P5) y Álgebra Lineal (P6, P7, P8), y adicionalmente, la pregunta extra (P10) relativa al curso, se obtiene que: Cálculo Diferencial obtiene un logro del 70%, Precálculo: 67%, Álgebra Lineal: 65% y Pregunta extra: 94%. A partir de lo anterior, el desempeño más bajo se observó en Álgebra Lineal, lo que sugiere una brecha en la base algebraica de los estudiantes.
Un análisis más minucioso de la dimensión de ***Cálculo Diferencial***, que engloba las preguntas P1, P3 y P9, da cuenta que, si bien P1 obtuvo un alto nivel de logro en promedio (90%), sus pares P3 y P9 obtienen una puntuación promedio más baja, correspondientes al 62% y 56% respectivamente (ver Tabla 3). Así el promedio de la dimensión se aproxima al 70%.
Existe al parecer una diferencia interna. Si bien, P1 es una tarea que involucra una habilidad de interpretar, las preguntas P3 y P9 se relacionan con la habilidad de inferir, lo que supone que esta habilidad presenta mayor dificultad para las y los participantes. Dicho de otra manera, las y los estudiantes tienden a leer representaciones de funciones (interpretar) con mayor facilidad que inferir propiedades u obtener alguna conclusión en el ámbito del Cálculo Diferencial.
Respecto de la Dimensión ***Precálculo***, correspondiente a las preguntas P2, P4 y P5, las y los estudiantes obtienen un puntaje promedio en esta dimensión del 67%. Las tres preguntas obtienen un puntaje bastante similar en torno al 62% para P2 y 68% para P4 y P5 (ver Tabla 3),

Tabla 3: Resumen descriptivo por pregunta del Diagnóstico de entrada

| 0 | count | mean | std | min | 25% | 50% | 75% | max |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **P1** | 147 | 0.9 | 0.21 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 |
| **P2** | 136 | 0.62 | 0.37 | 0.0 | 0.5 | 0.5 | 1.0 | 1.0 |
| **P3** | 138 | 0.62 | 0.42 | 0.0 | 0.12 | 0.5 | 1.0 | 1.0 |
| **P4** | 144 | 0.68 | 0.27 | 0.0 | 0.5 | 0.5 | 1.0 | 1.0 |
| **P5** | 133 | 0.68 | 0.35 | 0.0 | 0.5 | 0.5 | 1.0 | 1.0 |
| **P6** | 143 | 0.81 | 0.32 | 0.0 | 0.5 | 1.0 | 1.0 | 1.0 |
| **P7** | 136 | 0.57 | 0.35 | 0.0 | 0.5 | 0.5 | 1.0 | 1.0 |
| **P8** | 131 | 0.53 | 0.31 | 0.0 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 1.0 |
| **P9** | 131 | 0.56 | 0.4 | 0.0 | 0.0 | 0.5 | 1.0 | 1.0 |
| **P10** | 135 | 0.94 | 0.22 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 |

Fuente: Elaboración propia

lo cual evidencia que si bien existe una preparación previa en lo que respecta al eje de funciones y sus representaciones gráficas y algebraicas, no es suficientemente sólida como para consolidar un comportamiento adecuado, sino que únicamente logros parciales al respecto.
En cuanto a la Dimensión de ***Álgebra Lineal***, que considera las preguntas P6, P7 y P8, evidencia que si bien P6 alcanza un 81% de logro promedio, P7 y P8 bajan al 57% y 53% respectivamente (ver Tabla 3). En esta dimensión, al igual que la dimensión de Cálculo, la pregunta P6 se vincula con la habilidad de interpretar, mientras que P7 y P8 con inferir. Lo anterior supone que si bien las y los estudiantes son capaces de interpretar algunos aspectos relevantes del álgebra lineal desde un punto de vista gráfico, no se evidencia un alto desarrollo de la habilidad de inferir propiedades en el registro algebraico.

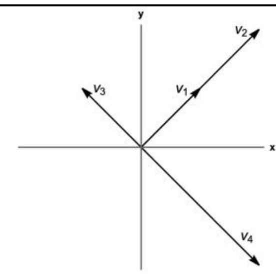
## ANÁLISIS EN CUANTO A HABILIDADES Y CONVERSIÓN DE REGISTROS

Al analizar los datos desde el punto de vista del desarrollo de las habilidades de interpretar e inferir, se evidencia al menos en dos dimensiones que las preguntas de interpretación (P1, P2, P4, P6, P10) fueran mucho más sencillas, lo que podría sugerir que las y los estudiantes pueden reconocer y transferir una misma información de una representación en otra (conversión de registros semióticos), pero no necesariamente producirlas ni establecer inferencias a partir de ellas en otro registro. En este sentido, en lo que respecta a habilidades, interpretar alcanzó un 79%, mientras que la habildiad de inferir un 59%. Las y los estudiantes tienden a quedarse en un logro parcialmente correcto o simplemente fallar. Esto revela mayor dificultad en tareas que involucran la obtención de una conclusión en torno a una información dada en un registro y que debe ser transformada para obtener una nueva información en otro registro. Lo anterior también puede sugerir que aún existe una resistencia respecto del desarrollo de razonamientos más profundos en los ámbitos de Cálculo Diferencial, Álgebra Lineal y Precálculo.
Al analizar los resultados por conversión de registros, las y los estudiantes lograron mejores resultados en la conversión de los registros Gráfico → Simbólico (76%) que en la conversión Simbólico → Gráfico (62%). Lo anterior sugiere que las y los estudiantes logran leer representaciones gráficas y traducirlas al contexto algebraico, pero tienen dificultades para

construirlas a partir del registro simbólico, transitando hacia el registro gráfico, lo que es central en el estudio de EDOs.

## ANÁLISIS DE LA PREGUNTA P7

7. Considere los vectores $v_1, \ldots, v_4$ en $\mathbb{R}^2$ del diagrama de la derecha.




Suponga que

$$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

es una transformación lineal tal que

$$L(v_1) = v_2 \quad \text{y} \quad L(v_3) = v_4.$$

Entonces:

I. $\det L > 0$
II. $\{v_1, v_3\}$ es una base de vectores propios de $L$
III. Si $L(v_3) = \mu \cdot v_3$, para $\mu \in \mathbb{R}$, entonces $\mu < 0$

De las afirmaciones anteriores, son verdaderas:

(A) sólo I y III
(B) sólo I y II
(C) sólo II y III
(D) I, II y III

Figura 2: Pregunta 7 del diagnóstico de entrada para evaluar Visualización Matemática
Fuente: Elaboración propia

En lo que respecta al análisis de la pregunta P7 (ver Figura 2), se solicita evaluar tres informaciones a partir de la representación gráfica que se presenta. Si bien, los elementos simbólicos de la tarea tales como $L$ siendo una transformación lineal de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y los datos en que $L(v_1) = v_2$ y $L(v_3) = v_4$ son relevantes, pues permiten establecer que $v_2$ es una ponderación por escalar del vector $v_1$ y por lo tanto se encuentra en su dirección, y así mismo $v_4$ respecto de $v_3$. Sin embargo, no se nos informa respecto del sentido de los vectores que resultan de la transformación.
De aquí que el registro gráfico comanda en la actividad semiótica, debido a que, el gráfico permite:

- *Interpretar* la dirección de los pares de vectores $(v_1, v_2)$ y $(v_3, v_4)$.
- *Interpretar* que $v_2$ preserva el sentido y dirección de $v_1$, mientras que $v_4$ se encuentra en la dirección de $v_3$ pero cambia su sentido.
- *Inferir* que el conjunto de vectores $\{v_1, v_3\}$ no son colineales, es decir satisfacen la propiedad de independencia lineal, necesario para establecer que $\{v_1, v_3\}$ pudiesen formar una base (ordenada) del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.
- *Inferir que el ángulo entre* $\{v_1, v_3\}$ (base ordenada) es menor o igual a 90°, lo que indica una orientación positiva entre los vectores. Bajo $L$, la orientación cambia, pues el menor ángulo entre ellos se obtiene con orientación negativa desde $L(v_1) = v_2$ a $L(v_3) = v_4$.

En virtud de lo anterior, la afirmación I, es *falsa* puesto que, la orientación de $\{v_1, v_3\}$ y de $\{v_2, v_4\}$, desde un punto de vista geométrico (menor ángulo entre ellos), permite inferir que $Det(L) < 0$.
En cuanto a la afirmación II, es verdadera. Es evidente que $\{v_1, v_3\}$ es base del espacio al ser un conjunto linealmente independiente y de cardinalidad 2. Ahora, para que sea una base de vectores propios, debe satisfacer la relación $L(v_1) = \lambda \cdot v_1$. En otras plabaras, los vectores formados bajo la aplicación $L$ sobre $v_1$ son colineales con $v_1$. Precisamente este es el caso de $v_2$

que en el registro gráfico es colineal con $v_1$ y además, $L(v_1) = v_2$. El mismo razonamiento se utiliza para $v_3$ y $v_4$. Finalmente, de este último razonamiento, se puede concluir respecto de la afirmación III, puesto que $L(v_3) = v_4$ y $L(v_3) = \mu \cdot v_3$, entonces $v_4 = \mu \cdot v_3$. Como $v_4$ tiene misma dirección pero sentido contrario a $v_3$, entonces $\mu < 0$.

En lo que respecta al análisis de respuestas, se evidencia que, 45 estudiantes (30.61%) responde correctamente a la pregunta, mientras que 66 (44.9%) responden de forma parcialmente correcta. Esto se traduce en que 34 estudiantes seleccionaron la alternativa B y 32 estudiantes la alternativa D. Ambas alternativas consideran como respuesta correcta que $Det\, L > 0$. Si bien, esto se puede atribuir a varias razones, un razonamiento bastante plausible al respecto sería considerar que ángulos entre vectores sin orientación, y considerando el menor ángulo entre ellos, se obtiene en cuyo caso que $Det\, L > 0$ para cualquiera la medida del ángulo entre vectores. Así por ejemplo, entre $\{v_1, v_3\}$ y $\{v_2, v_4\}$, los ángulos entre ellos serían menores o iguales a 90°. Lo anterior puede deberse a la coordinación de registros semióticos y la concepción que se tiene del determinante en el registro gráfico-figural asociado con la orientación de vectores y el signo del determinante. Es bastante probable que, en el caso de estudiantes que eligen la opción B, no logran relacionar dos representaciones simbólicas de $L(v_3) = v_4$ y $L(v_3) = \mu \cdot v_3$, de donde la transitividad como tratamiento dentro del registro simbólico permitiría generar una nueva relación simbólica: $v_4 = \mu \cdot v_3$. Finalmente, la decisión sobre el signo de $\mu$ (sign[$\mu$]) dependerá de la interpretación que se haga de este: sign[$\mu$] $\equiv$ sentido de $v_4$ respecto a $v_3$.

## ANÁLISIS DE LA PREGUNTA P10

En cuanto al análisis de la pregunta P10 (ver Figura 3), si bien, obtiene un alto nivel de logro (85%), se propone a través de la pregunta realizar una interpretación sobre la noción de *atractor* desde lo gráfico a lo simbólico, de manera intuitiva. Cabe señalar que este concepto es introducido en esta asignatura y por la misma razón es que, su interés reposa en las concepciones que se tienen previo al estudio de su concepto matemático, tomando por referencia el repertorio lingüístico de los sujetos, siendo el lenguaje verbal el primer registro de acceso a la construcción de representantes semióticos.

Si bien, el logro en esta pregunta es el esperado, cabe señalar que aún así hay un 10% de estudiantes que deciden no contestar a ella. Esto podría ser reflejo de alguna dificultad vinculada con la naturaleza de la tarea misma provocando malentendidos semióticos. En primer lugar, si el concepto de *atractor* hiciese referencia a alguna propiedad bastante particular de los objetos matemáticos involucrados, entonces no bastaría con interpretar la dirección/orientación de las fle-

10. En la gráfica de la derecha, se muestra el flujo de un campo de vectores

$$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

y cuatro puntos marcados.

Cuál punto pensaría usted que corresponde a un *atractor*.

(A) Punto A (C) Punto C

(B) Punto B (D) Punto D

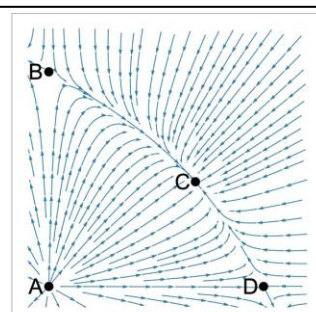



Figura 3: Pregunta 10 del diagnóstico de entrada para evaluar Visualización Matemática
Fuente: Elaboración propia

chas del diagrama, sino realizar una actividad cognitiva mayor, de *inferencia*, de la cual, bajo la suposición de un malentendido semiótico, no habría un conocimiento matemático de referencia para poder avanzar hacia la resolución de la tarea. En segundo lugar, es probable que el campo de vectores representado simbólicamente por $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ tenga un efecto sobre este malentendido semiótico, en la medida en que si la o el estudiante supone que debe realizar una actividad cognitiva de inferencia, entonces $\vec{F}$ y el diagrama deben ser manipulados para obtener una nueva información. Estas incongruencias cognitivas podrían potencialmente provocar que un número no menor de estudiantes decida no responder.

## CONCLUSIONES

Los resultados del diagnóstico aplicado nos permiten concluir que las y los estudiantes que ingresan al curso de EDOs presentan un dominio intermedio en la competencia de visualización matemática, con un rendimiento global cercano al 65–70%. Este nivel, aunque suficiente para abordar la asignatura, evidencia brechas significativas en torno a la habilidad de inferir y en la conversión de registros del ámbito simbólico al gráfico. Estas dificultades sugieren que la formación previa en cálculo diferencial y, en particular, en álgebra lineal, no ha logrado consolidar aprendizajes que favorezcan la generación de conclusiones a partir del uso de representaciones semióticas. Bajo la hipótesis de Duval, esto podría desembocar en la existencia de representaciones semióticas inertes o inútiles fuera del contexto mismo de su propio estudio (Duval, 2006), impidiendo por lo tanto, la conexión entre diferentes representantes de un mismo objeto.
Asimismo, el análisis mostró que la habilidad de *interpretar* alcanza desempeños superiores a la de *inferir*, lo que indica que las y los estudiantes en formación inicial de ingeniería son capaces de reconocer y trasladar información entre representaciones, pero no necesariamente de producir nuevas conclusiones ni razonamientos profundos a partir de ellas. Este hallazgo plantea la necesidad de diseñar experiencias de aprendizaje durante la asignatura que ofrezcan una perspectiva más abierta hacia el desarrollo de la habilidad de inferir, mediante la elaboración de razonamientos más sofisticados y que les permitan favorecer una comprensión más profunda de los objetos matemáticos en estudio y su vínculo con fenómenos propios de las disciplinas de ingeniería, sus interpretaciones e inferencias, que promuevan la toma de decisiones fundadas en argumentos bien elaborados.
En términos de conversión de registros, la mayor dificultad se presenta al transitar desde lo simbólico hacia lo gráfico, lo que resulta especialmente relevante en el contexto del análisis cualitativo de EDOs.
Finalmente, este estudio constituye la primera fase de un proyecto más amplio que contempla, además de la aplicación del diagnóstico inicial, el diseño y la implementación de tareas de aprendizaje apoyadas por el software de cálculo científico Mathematica®, y el posterior contraste de resultados entre la evaluación inicial y final. En este sentido, el trabajo aquí presentado ofrece una base para el seguimiento de la evolución de la competencia de visualización a lo largo del curso.

## AGRADECIMIENTOS

Investigación parcialmente financiada por el proyecto “Visualización matemática en la formación inicial de ingeniería”, ING 2430004, en el marco del proyecto ANID “Ingeniería de Frontera hacia el 2030”. Agradecemos a las y los estudiantes de la asignatura que aceptaron ser parte de este estudio y a María Fernanda Martínez, Alex Aguayo y Vicente Otazo, laborantes del proyecto.

## REFERENCIAS

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 52(3), 215–241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Arnol'd, V. I. (1973). *Ordinary differential equations* (R. A. Silverman, Trans.). MIT Press.

Arnol'd, V. I. (1978). *Mathematical methods of classical mechanics* (J. Szucs, Trans.). Springer. (Original work published 1974). ISBN 0387968903.

Binder, K., Krauss, S., & Bruckmaier, G. (2015). Effects of visualizing statistical information – an empirical study on tree diagrams and 2 x 2 tables. Frontiers in Psychology, 6, 1186. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.01186

Darling-Hammond, L. (28 de junio de 2025). It's time to change the math calculus, how the us can finally get math education right. *Forbes.* https://www.forbes.com/sites/lindadarlinghammond/2025/06/28/its-time-to-change-the-math-calculus-how-the-us-can-finally-get-math-education-right/

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5,* 37–65.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (2.ª ed.). Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Guzmán, P., Cifuentes Gomez, G., & Santelices, M. V. (2021). Secondary students' expectations on transition to higher education. Educational Research, 63(2), 164–179. https://doi.org/10.1080/00131881.2021.1915173

Hirsch, M. W., & Smale, S. (1974). *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Academic Press. ISBN 0-12-349550-4 (ISBN 978-0-12-349550-1 [13-digit]).

Kobiela, M., & Lehrer, R. (2019). Supporting dynamic conceptions of area and its measure. Mathematical Thinking and Learning, 21(3), 178–206. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1576000

Mejia-Ramos, J. P., & Weber, K. (2019). Mathematics majors' diagram usage when writing proofs in calculus. Journal for Research in Mathematics Education, 50(5), 478–488. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.50.5.0478

Pepin, B., Biehler, R., & Gueudet, G. (2021). Mathematics in Engineering Education: a Review of the Recent Literature with a View towards Innovative Practices. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education 7:163–188. https://doi.org/10.1007/s40753-021-00139-8

Poincaré, H. (1881). Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (I). *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 7,* 375–422. https://www.numdam.org/item/JMPA_1881_3_7__375_0.pdf

Povilianskas, A. & Tsosie, H. (2023) Visualizing fundamental engineering mathematics concepts through use of interactive viewports. ASEE Zone 1 Conference - Spring 2023. https://doi.org/10.18260/1-2--44710.

Schoenherr, J., Strohmaier, A. R., & Schukajlow, S. (2024). Learning with visualizations helps: A meta-analysis of visualization interventions in mathematics education. Educational Research Review, 100639. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2024.100639