

DISEÑO DE ENSEÑANZA DE LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA CON USO DE TIC EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Denise Chamorro M., Universidad Católica de la Santísima Concepción, dchamorro@ucsc.cl

Maritza Galindo I., Universidad San Sebastián, maritza.galindo@uss.cl

Verónica Aguirre S., Universidad San Sebastián, vaquirres@correo.uss.cl

RESUMEN

Este trabajo surge de la necesidad de fortalecer la didáctica de la enseñanza de la derivada, que se ha desarrollado principalmente bajo un mismo paradigma tradicional.

En este proyecto se diseñó una trayectoria didáctica para fortalecer la enseñanza del objeto matemático la derivada para estudiantes de ingeniería de primer año en la UCSC. El diseño metodológico consideró diversas representaciones de la derivada en los campos de problemas y la integración de las TIC en las actividades, lo cual favorece el uso de lenguajes y permite un acercamiento progresivo al significado de este objeto matemático, que es uno de los más utilizados en ingeniería.

INTRODUCCIÓN

Las escuelas de ingeniería están interesadas en estructurar sus carreras orientadas al desarrollo de competencias (Letelier, López y Pérez, 2007), promoviendo un cambio profundo en la readecuación del contenido disciplinario en las ciencias básicas y en la evaluación formativa orientada hacia sus resultados de aprendizaje. Esto involucra el desafío de repensar la metodología de enseñanza, suscitando aprendizajes activos de participación y compromiso de los estudiantes, desarrollando habilidades de trabajo autónomo y de equipo con uso de tecnologías. Sin embargo, la asignatura de cálculo I es considerada difícil para los estudiantes de ingeniería, y si bien los nuevos modelos curriculares consideran el rol activo de los(as) estudiantes, éstos no son asimilados por los(as) profesores(as), descuidando el desarrollo de la comprensión de conceptos importantes y sus aplicaciones en la ingeniería.

Las orientaciones sobre la enseñanza del cálculo promueven la innovación metodológica activa con distintos dispositivos didácticos en el aula de cálculo I, y cuya efectividad en los(as) estudiantes se favorece con una enseñanza apoyada con recursos tecnológicos. Sin embargo, la experiencia docente indica que en el nivel universitario los(as) estudiantes no logran comprender conceptos relacionados con la derivada y ni determinan sus múltiples aplicaciones (monotonía de una función, problemas de variaciones relacionadas, problemas de optimización, regla de L'Hopital, cálculo integral, ecuaciones diferenciales y problemas de física).

En el contexto del curso de Cálculo I (IN1002C) que se imparte a estudiantes de ingeniería de la UCSC, se presentan las mismas condiciones desfavorables en el aprendizaje de la derivada; debido a su complejidad, es habitual que los procesos de enseñanza presenten al estudiante una versión dogmática privilegiando su representación algebraica y en escasas situaciones su representación gráfica o tabular, aun cuando el Modelo Educativo Institucional de la UCSC consideran el rol activo de los estudiantes.

Lo anterior, muestra la necesidad de realizar un diseño de enseñanza específica sobre la derivada para estudiantes de ingeniería.

Es por ello que el objetivo de la investigación es analizar cómo utilizan equilibradamente los lenguajes simbólico, gráfico, numérico y escrito en el planteamiento y resolución de problemas relacionados con la aplicación de la derivada, focalizándonos en los estudiantes

de ingeniería y que, mediante el uso de las tecnologías, los motive en la profundización del Cálculo Diferencial.

BASES TEÓRICAS

EL CÁLCULO DIFERENCIAL EN INGENIERÍA CIVIL

La asignatura de Cálculo I es considerada difícil por estudiantes de ingeniería, con bajos niveles de resultados de aprendizaje. Consideramos como posibles causas la implementación de nuevos procesos curriculares no asimilado por los docentes, escaso manejo de los docentes en metodologías de enseñanza y la estructura de un programa de actividad curricular extensa y poco flexible. Esto conlleva a una carencia de los docentes a evaluar por resultados de aprendizaje, continuación con propuestas de actividades algebraicas y descontextualizadas en el aula, escasa comprensión de conceptos fundamentales de los estudiantes y en consecuencia un alto porcentaje de reprobación de la asignatura.

Las Escuelas de Ingeniería están presentando nuevos modelos educativos basados en competencias; destacando el rol activo del estudiante, la utilización de recursos informáticos y de plataformas virtuales de aprendizaje en la docencia y la preparación del profesorado en metodologías de enseñanza actualizada. Así, la directriz es implementar un currículo menos técnico y cada vez más práctico, en un contexto de Concebir-Diseñar-Implementar-Operar (CDIO, <http://www.cdio.org/>) siendo uno de los estándares los resultados de aprendizaje (Martínez, Muñoz, Cárdenas y Cepeda, 2013). Esto ha suscitado un interés sobre la enseñanza en asignaturas de Cálculo I.

Este trabajo, en correspondencia con los estándares CDIO, tiene presente el resultado de aprendizaje RA1: Comprender el concepto de la derivada y sus aplicaciones en la resolución de problemas en la ingeniería, en particular de máximos y mínimos.

LA DERIVADA EN EL CURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Uno de los objetos matemáticos más importantes del cálculo es la derivada. El cual se reporta en diversas investigaciones una comprensión superficial, si bien muchos estudiantes pueden aprender a realizar de forma mecánica cálculos de derivadas y resolver algunos problemas, se evidencian dificultades para alcanzar su verdadera comprensión (Artigue, 1998; Badillo, 2003; Cortés, 2006; Sánchez, García y Llinares, 2006; Font y Contreras, 2008; Badillo, Azcárate y Font, 2011; Londoño, Kakes y Decena, 2013; Vanegas, Bermúdez y López, 2013; Flores, 2014; Pino-Fan, Godino y Font, 2015; Gutiérrez, Buitrago y Ariza, 2017). Esto debido a que la derivada es un tópico que conjuga muchos conceptos asociados (función real, plano cartesiano, pendiente, ecuación de una recta, recta tangente, límite de una función real, monotonía y extremos relativos, etc.), posee diversos aspectos dependiendo de las situaciones problemas (Sánchez et al., 2006), diversas propiedades, procedimientos y argumentos que transitan constantemente entre un lenguaje escrito, gráfico, numérico y simbólico, lo que complejiza aún más su comprensión.

Por otra parte, diferentes investigaciones reportan la necesidad de incorporar las TIC con el fin de apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje a que sea más enriquecedor y que nuestros estudiantes desarrollen competencias digitales necesarias en la sociedad actual (Esnaola y Ansó, 2019; Hernández, Prada y Ramírez, 2018; Martín, Hernández y Mendoza, 2017).

LAS TIC EN LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA

En cuanto a la incorporación de las TIC en la enseñanza de objetos matemáticos complejos como la derivada, sus aplicaciones e interpretaciones, los resultados señalan que el uso de estas herramientas tecnológicas, ofrece a los estudiantes una apropiación de los conceptos, permite la verificación de lo realizado de forma algebraica, la interpretación apropiada de

los resultados y la capacidad de aplicar lo aprendido (Pico, Díaz y Escalona, 2017; Pineda, Hernández y Avendaño, 2020; Salas y Lugo, 2019).

En el transcurso de los años, las TIC han sido un aporte en los procesos de enseñanza de la matemática, Lagrange, Artigue, Laborde y Trouche (2001), presenta los resultados de un meta-análisis de más de 600 publicaciones con informes de investigaciones y experiencias de innovación sobre el uso de las TIC en la Educación Matemática. La línea del cálculo es la que ha recibido el mayor interés e inversión en el uso de tecnologías. En particular, el objeto matemático la derivada ya que permite aproximarse al concepto considerando diversas representaciones (Tall, 2001). Este trabajo presenta un diseño de enseñanza de la interpretación geométrica de la derivada (IGD), basado en el marco teórico del enfoque ontosemiótico de Godino, Batanero y Font (2019), orientado a estudiantes de ingeniería mediante un acercamiento global hacia la comprensión del objeto con uso de TIC.

METODOLOGÍA

Bases del diseño de enseñanza y fases de desarrollo

a) *Campo de problema*: la propuesta considera la situación-problema interpretación geométrica de la derivada; b) *Actividades*: manipulativas (regla, calculadora gráfica); *computacionales* (notebook o celulares o Tablet, internet, Software educativos como Symbolab (versión gratuita), Wolfram Alpha (versión gratuita), Geogebra (versión gratuita), código QR, videos educativos y applets dinámicos); Las que se diferencian en tipo A (el lenguaje predominante es numérico y gráfico) y tipo B (el lenguaje predominante es simbólico y escrito); c) *Trabajo autónomo y dirigido en el aula*: sesiones no presenciales de trabajo autónomo que incluyen la revisión de videos educativos, apuntes teórico-práctico y actividades guiadas, disponibles en la plataforma virtual Moodle y sesiones presenciales, actividades iniciales que favorezcan el diálogo y actividades grupales colaborativas manipulativas, computaciones y algebraicas; d) *Representaciones didácticas*: tres tipos de representaciones didácticas *tabular, algebraica y gráfica*, (Font, 2005. La secuencia contempla cuatro sesiones presenciales y dos sesiones no presenciales (tiempo: una semana).

Tabla 1. Temporalización y Planificación.

Sesión	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Representaciones Didácticas	Tipos de Actividades
1 (No presencial)	Visualización video 1, estudio manuscrito teórico. Actividad 1	Introducción de la interpretación geométrica de la derivada. Obtención de la pendiente de la recta tangente mediante aproximaciones por la pendiente de rectas secantes	Tabular Gráfica	Manipulativa Computacionales Tipo A
2	Actividad 2	Aplicación económica de la pendiente de una recta tangente a una curva.	Tabular Gráfica	Computacionales Tipo B
3	Actividad 3	Interpretación geométrica de la	Algebraica	Computacionales Tipo B

		derivada en un punto particular		
4 (No presencial)	Visualización video 1, estudio manuscrito teórico.	Introducción de la función derivada	Tabular Gráfica Algebraica	Computacionales Tipo A
5	Actividad 4	Articulación de la derivada de una función en un punto y su función derivada	Gráfica Algebraica	Computacionales Tipo A Tipo B
6	Actividad 5	Generalización de la derivada de una función en un punto y su función derivada	Algebraica	Computacionales Tipo A

REFLEXIONES Y CONCLUSIONES

En este trabajo que propone un diseño de enseñanza de la IGD que consideró actividades gráficas, tabulares y algebraicas, manipulativas y computacionales; en las cuales se consideró la definición de conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos un tránsito entre los lenguajes escrito, numérico, gráfico y simbólico. Un aporte importante de este trabajo es que las actividades diseñadas y los applets utilizados serán un material útil tanto para investigadores de este objeto matemático como para los profesores que se interesen en la enseñanza de la derivada. Considerando que todo proceso de enseñanza es perfectible, el siguiente paso es implementar y valorar la idoneidad didáctica del proceso de instrucción para identificar en detalle sus limitaciones y fortalezas, con el fin de sugerir modificaciones, reorganizaciones, mejorar las actividades y los instrumentos de evaluación. Posteriormente, es de interés agregar otros sistemas de prácticas, para de esta manera contribuir a una mejor comprensión de la derivada en el contexto de la educación superior.

REFERENCIAS

- Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 1(1), 40-55.
- Badillo, E. (2003). La Derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.
- Badillo, E., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ de profesores de matemáticas. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), 191-206.
- Cortés, J. (2006). La razón de cambio (cociente de incrementos) desde un punto de vista gráfico y numérico. *Revista Unión*, 8, 3-10.
- Eснаоla, G., & Ansó MB. (2019). Competencias digitales lúdicas y enseñanza. *REIDOCREA*, 8, 399-410.
- Flores, A. (2014). Enfoque conceptual del cálculo en la formación de docentes: Ejemplos con uso de tecnología interactiva. *Revista El Cálculo y su Enseñanza*, 5 (5), 1-26.
- Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En Maz, A., Gómez B., y Torralbo M. (Ed.), *Investigación en Educación Matemática*. Noveno

- Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. (pp. 109-128). Córdoba: SEIEM.
- Font, V., & Contreras, A. (2008). The problema of the particular and its relation to the general in mathematics education. En *Educational Studies in Mathematics*. 69(1), 33-52.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 37-42.
- Gutiérrez, L., Buitrago, M., & Ariza, L. (2017). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. *Rev. Cient. Gen. José María Córdoba*, 15(20), 137-153.
- Hernández, C., Prada, R., & Ramírez, P. (2018). Perspectivas actuales de los docentes de educación básica y media acerca de la aplicación de las competencias tecnológicas en el aula. *Revista Espacios*, 49(43), 1-13.
- Lagrange, J., Artigue, M., Laborde, C., y Trouche, L. (2001). A meta study on IC Technology in education. Towards a multidimensional framework to tackle their integration. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Freudenthal Institute. *Proceedings of de PME 25*, Utrecht (Netherlands), 111-122.
- Letelier, M., López, L., Carrasco, R., y Pérez, P. (2005). Sistema de competencias sustentables para el desempeño profesional en ingeniería. *Revista Facultad de Ingeniería-Universidad de Tarapacá*, 13(2), 91-96.
- Londoño, N., Kakes, A., y Decena, V. (2013). Algunas dificultades en la resolución de problemas con derivadas. En Flores, Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 935-942). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Martín, M., Hernández, C., & Mendoza, S. (2017). Ambientes de aprendizaje basados en herramientas web para el desarrollo de competencias TIC en la docencia. *Revista Perspectivas*, 2(1), 97-104.
- Martínez, C., Muñoz, M., Cárdenas, C., & Cepeda, M. (2013). Adopción de la Iniciativa CDIO en los planes de estudio de las carreras de la Facultad de Ingeniería de la UCSC. In 11th Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology Cancún, México.
- Pico, R., Díaz, F., & Escalona, M. (2017). Enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial aplicando el asistente matemático Derive. *Tecnología Educativa*, 2(1), 24-31.
- Pineda, W., Hernández, C., & Avendaño, W. (2020). Propuesta didáctica para el aprendizaje de la derivada con Derive. *Praxis & Saber*, 11(26), e9845.
- Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2015). Una Propuesta para el Análisis de las Prácticas Matemáticas de Futuros Profesores sobre Derivadas/A Proposal for the Analysis of Prospective Teachers' Mathematical Practices on Derivatives. *Bolema*, 29(51), 60.
- Salas, R., & Lugo, J. (2019). Impacto del aula invertida durante el proceso educativo sobre las derivadas. *EDMETIC*, 8(1), 147-170.
- Sánchez-Matamoros, G., García, G., García, B., y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(1), 85-98.
- Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*. 48(2-3), 200-238.
- Vanegas, E., Bermúdez, Y., & López, L. (2013). Propuesta metodológica en la aplicación de la derivada en Ingeniería Agroforestal. *Ciencia e Interculturalidad*, 17(8).