



AUTOMATIZACION DEL METODO DE PROGRAMACION DINAMICA EN UNA PLANILLA EXCEL

Eduardo Pérez-Lobato. Universidad de Antofagasta. eduardo.perez@uantof.cl

RESUMEN

La Programación Dinámica es un método recursivo utilizado para optimizar problemas que contienen múltiples etapas. El método subdivide el problema en pequeños problemas y aplicando una política general en forma recursiva en cada una de estas subdivisiones, permite seleccionar las etapas que satisfacen en forma óptima la política y descartar aquellas que no la satisfacen. La solución que entrega el método es el conjunto de etapas que deben ser recorridas para que el problema se optimice en acuerdo a la política preestablecida.

La Programación Dinámica se imparte en la asignatura de Taller de Investigación de Operaciones, y a pesar de la utilidad que este método presta, este casi no es utilizado por los alumnos una vez que concluyen la asignatura, lo cual se explica por lo teórico del método y que su resolución es enseñada por la vía manual, siendo esta muy laboriosa, demandante de tiempo y de difícil comprensión. Este último aspecto se ve especialmente agravado por la pandemia, toda vez que al estar los alumnos sometidos a la enseñanza virtual, la dificultad de comprensión aumenta sustantivamente. Finalmente es necesario indicar que si bien existen aplicaciones comerciales que contienen el método de Bellman, estas son muy onerosas para los estudiantes

En relación a lo anterior, se expone en este trabajo la programación computacional del método, cuya finalidad es automatizarlo y como consecuencia, hacerlo más asequible a estudiantes en formación.

Palabras clave: Programacion Dinámica, Programacion Matemática, Algoritmos recursivos



INTRODUCCION

Es corriente encontrar en el campo de las actividades humanas procesos que contienen múltiples estados, las cuales suelen representar periodos de tiempo o lugares. Asimismo, los estados contienen una multiplicidad de nodos, los cuales representan etapas, tales como máquinas, estaciones de trabajo, bodegas, puertos, aeropuertos, centrales eléctricas, etc.

Ahora, en los procesos se plantean requerimientos de optimización, tales como la maximización del rendimiento trimestral de un cultivo agrícola de 5 fases laborales (4), la minimización de los costos anuales de la construcción de un puente de 6 etapas, la maximización de la cantidad de mineral extraído quincenalmente mediante 3 procesos (6), la minimización del uso del agua de 9 poblados (9,10), la maximización los pasajeros que anualmente traslada un tren que se mueve por 13 estaciones, la minimización del consumo semanal de combustible de vehículos (3), etc.

En relación a esto último es que se definen las siguientes denominaciones: problema en lugar de proceso, política en lugar de requerimiento y optimización como la maximización o la minimización del requerimiento.

En la asignatura de Taller de Investigación de Operaciones, adscrita a la malla rediseñada de la carrera de ingeniería civil industrial de la Universidad de Antofagasta, se enseña el método de Programación Dinámica de Bellman (1,7), mediante la técnica de Aprendizaje Basado en Problemas, o ABP.

Durante la impartición presencial del tema de Programación Dinámica se observaba que muchas veces los alumnos no alcanzaban a concluirlo en aula, como asimismo, los resultados de sus problemas solían tener errores, pero considerando que en la siguiente clase los alumnos traían los problemas completamente resueltos y sin errores, esto no indujo al profesor a introducir técnicas remediales.

Sin embargo, al enseñar esta asignatura en modalidad virtual como consecuencia de la pandemia, fue posible advertir que la casi totalidad de los alumnos no concluía los problemas asignados durante el tiempo de clases y, que a la siguiente clase, la mayoría de los alumnos no los traían concluidos puesto que no habían entendido a cabalidad el contenido del tema, como asimismo, aquellos estudiante que si traían los problemas concluidos, muchos de estos tenían resultados erróneos.

En virtud de lo anterior es que se hizo necesario analizar las causas que no permitían a los alumnos concluir los problemas de clases ni tampoco corregir los resultados.

El análisis estableció que el método de Bellman, que es un método matemático recursivo (1,8), no es de fácil comprensión para los alumnos y demanda interconsulta con el profesor, la cual no es fluida considerando las actuales restricciones de funcionamiento derivado de la pandemia.

Por otro lado, los alumnos, impedidos de reunirse y con una pobre interacción entre ellos, la cual queda relegada a una exigua comunicación mediante celulares y correos, tampoco soluciona la comprensión del método.

Asimismo, tampoco existen programas computacionales que contengan el método de Bellman y que sean gratuitos o de bajo costo, de manera que los estudiantes pudiesen haber encontrado una ayuda adicional.

En virtud de los antecedentes expuestos, es que el autor de este trabajo desarrolla una aplicación que automatiza el método de Bellman, logrando con ello disponer de más tiempo en aula para enseñar más pausadamente el método de Bellman, matizándolo con ejemplos para aclarar más su funcionamiento y uso. Además, la mayor disponibilidad de tiempo con la que ahora cuentan los estudiantes, permite que estos se focalicen en el análisis de los resultados y en la extracción de conclusiones.

DESCRIPCIÓN DE LA APLICACIÓN

Para describir el funcionamiento de esta aplicación se elabora, a partir de la formulación de problema, un diagrama de tres estados (S_1 - S_3) y cinco nodos (1-5), el cual se ilustra en la Figura 1. En un área de datos de una hoja EXCEL, la cual se denominará Nodos (j, S), se registran la numeración de los nodos que pertenecen a cada uno de los estados S , y, en otra área de datos de la misma hoja EXCEL, la cual se denominará Distancia(a, b), se registran las distancias numéricas entre dos nodos. Ambas áreas se muestran en la Figura 2.

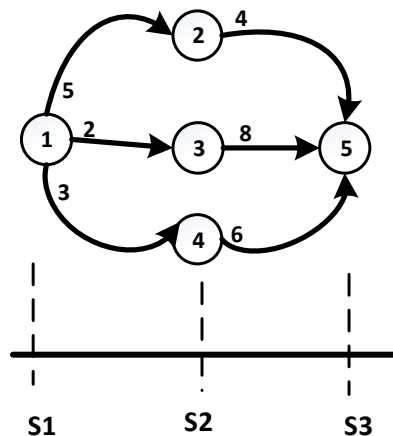


Figura 1. Ejemplo de diagrama de estados para describir la aplicación

La Figura 2 muestra el diagrama de flujo de la aplicación, en el cual se describe en forma general el funcionamiento de la aplicación, relegando el programa escrito en VBA para la sección Anexo de este trabajo.

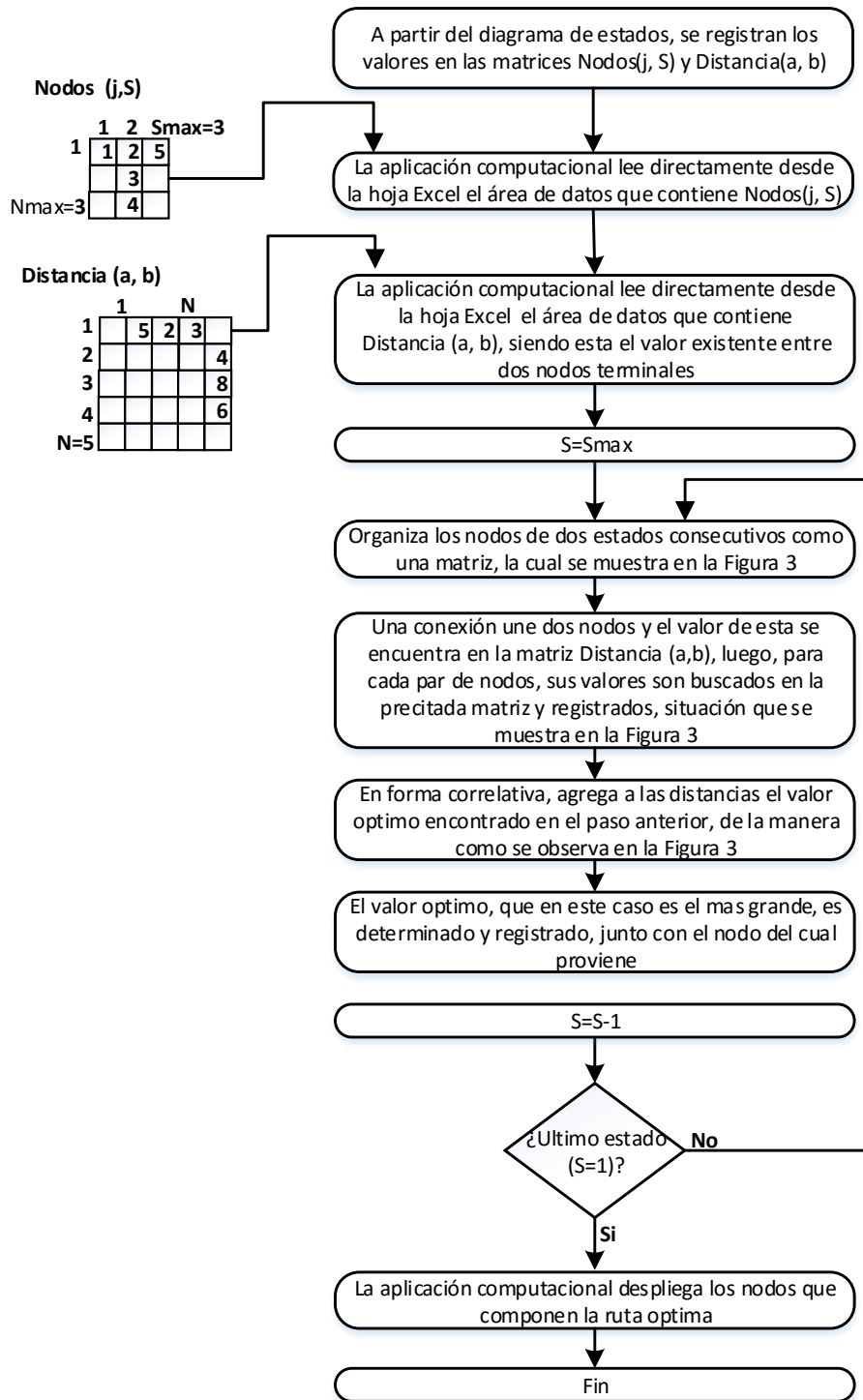


Figura 2. Diagrama de flujo de la aplicación

La figura 3 muestra paso a paso la manera como la aplicación entrega los resultados en cada iteración.

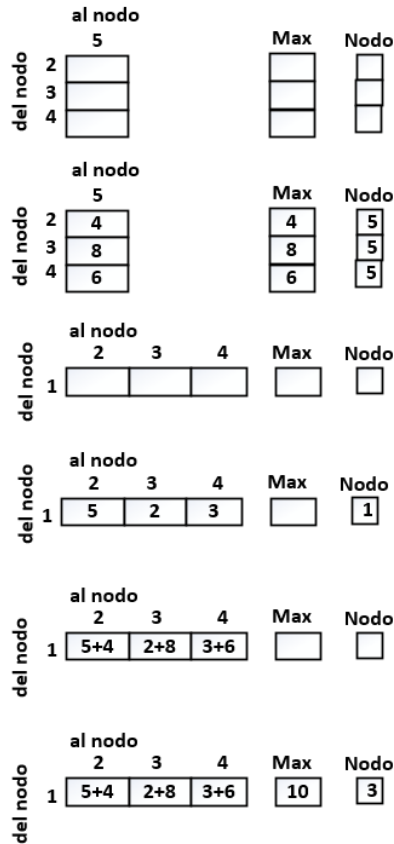


Figura 3. Resultados entregados por la aplicación

EVALUACION DE LA APLICACIÓN

La figura 4 muestra un diagrama de seis estados (S1-S6) y 14 nodos (1-14). Se denominará distancia al valor entre dos nodos consecutivos y se denominará ruta al conjunto de nodos existentes entre el nodo "1" y el nodo "14". Se propone en el siguiente ejemplo, diseñado para la enseñanza en aula, encontrar una ruta tal que aplicada una política general, que para este ejemplo sería minimización, la suma de todas sus distancias a lo largo del recorrido sea mínima.

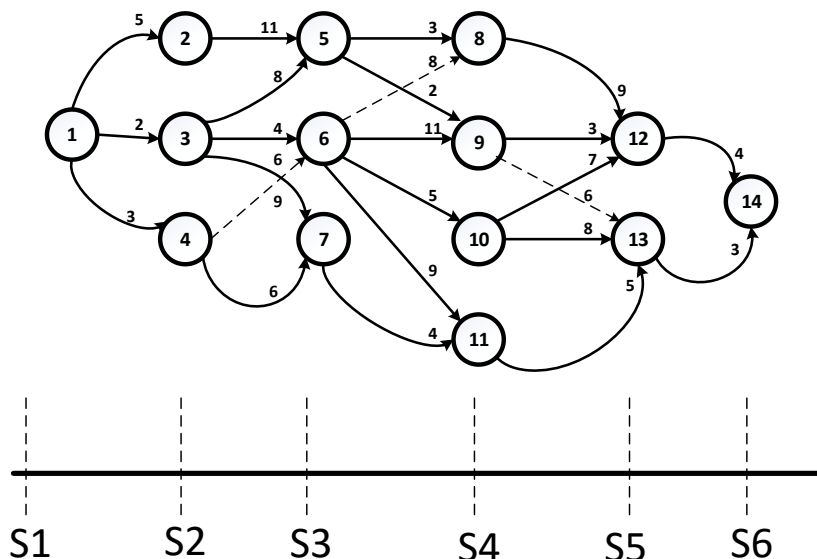


Figura 4. Diagrama de estados del ejemplo

Al observar el diagrama de estados de la Figura 4, se aprecia que cualquier intento por identificar una ruta que tenga una distancia total mínima, ya sea por inspección visual o intuitiva, no es en absoluto trivial.

Por otro lado, si se intenta aplicar en forma general la minimización de distancias sobre la totalidad de las rutas, entonces, después de un proceso laborioso y dilatado, se determina que existen veinte rutas, las cuales se ilustran en la Tabla 1, y, para cada una de estas hay que sumar la totalidad de sus distancias, para luego identificar la ruta que tenga la mínima distancia, a partir de la cual se obtiene el conjunto de nodos que la recorre, que es la solución al problema.

Es importante advertir que este es un sencillo problema de clases que no se condice con uno real, tal como por ejemplo, un recorrido de un avión durante una semana a lo largo de 12 aeropuertos o un programa quincenal de construcciones con 18 fases de trabajo.

Tabla 1. Distancia total de las rutas del diagrama de estados

Ruta	Nodos						Sumatoria de Distancias	Distancia Total
1	1	2	5	8	12	14	5+11+3+9+4	32
2	1	2	5	9	12	14	5+11+2+3+4	25
3	1	2	5	9	13	14	5+11+2+6+3	27
4	1	3	5	8	12	14	2+8+3+9+4	26
5	1	3	5	9	12	14	2+8+2+3+4	19
6	1	3	5	9	13	14	2+8+2+6+3	21
7	1	3	6	8	12	14	2+4+8+9+4	27
8	1	3	6	9	12	14	2+4+11+3+4	24
9	1	3	6	9	13	14	2+4+11+6+3	26
10	1	3	6	10	12	14	2+4+5+7+4	22
11	1	3	6	10	13	14	2+4+5+8+3	22
12	1	3	6	11	13	14	2+4+9+5+3	23



13	1	3	7	11	13	14	2+9+4+5+3	23
14	1	4	6	8	12	14	3+6+8+9+4	30
15	1	4	6	9	12	14	3+6+11+3+4	27
16	1	4	6	9	13	14	3+6+5+6+3	23
17	1	4	6	10	12	14	3+6+5+7+4	25
18	1	4	6	10	13	14	3+6+5+8+3	25
19	1	4	6	11	13	14	3+6+9+5+3	26
20	1	4	7	11	13	14	3+6+4+5+3	21

Usando el mismo ejemplo anterior, el área Nodos (j, S) y el área Distancia (a, b) se encuentran respectivamente registradas en las regiones A1:F4 y K1: X13 de una hoja EXCEL, las cuales se muestran respectivamente en la Figura 5 y en la Figura 6.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	2	5	8	12	14	BORRAR Area de datos	
2		3	6	9	13			
3		4	7	10			Bellman	
4				11				

Figura 5. Registro de nodos según estado

	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
1		5	2	3										
2				11										
3				8	4	9								
4					6	6								
5							3	2						
6							8	11	5	9				
7										4				
8											9			
9											3	6		
10											7	8		
11												5		
12													4	
13														3

Figura 6. Registro de valores entre nodos



Luego, al ejecutar la aplicación, esta registra los resultados de cada una de las iteraciones en la región A6:G31, de la misma hoja EXCEL, como se observa en la Figura 7.

	A	B	C	D	E	F	G
5							Optimo
6		14					
7	12	4					4
8	13	3					3
9							
10							
11							
12		12	13				
13	8	13					13
14	9	7	9				7
15	10	11	11				11
16	11		8				8
17							
18		8	9	10	11		
19	5	16	9				9
20	6	21	18	16	17		16
21	7				12		12
22							
23							
24		5	6	7			
25	2	20					20
26	3	17	20	21			17
27	4		22	18			18
28							
29							
30		2	3	4			
31	1	25	19	21			19

Figura 7. Resultados entregados por la aplicación

CONCLUSIONES

Esta aplicación fue utilizada durante las dictaciones del curso de Taller de Investigación de Operaciones, mediante enseñanza virtual considerando las condiciones de pandemia, desde el inicio del primer semestre del 2020 hasta el término del primer semestre del 2021, para tres paralelos diferentes, con 120 alumnos en total, en la cual es menester indicar que no hubo necesidad de tener que realizar demasiados ajustes.

Las condiciones de enseñanza por cada uno de los cursos fue la siguiente: 40 estudiantes reunidos durante los 90 minutos, que es el tiempo que toma una clase lectiva, organizados en 10 grupos de 4 estudiantes por grupo. Los tiempos promedio utilizados por cada uno de los grupos para resolver un problema a partir de su formulación fueron los siguientes: 10 minutos para preparar un diagrama de 8 estados y 30 nodos; 4 minutos para registrar los datos del diagrama de estados en una hoja EXCEL y verificar que no hayan equivocaciones y 1 minuto que le toma al dispositivo ejecutar toda la aplicación, ante lo cual hay que precisar que los dispositivos son celulares, tabletas o computadores, con distintos procesadores, capacidades de memoria RAM y



antigüedades. En relación a lo anterior, se concluye que quedaban 75 minutos liberados, lo cual equivale a un promedio de 7,5 minutos de atención de consultas por grupo, permitiendo al profesor aclarar dudas a los estudiantes y analizar sus resultados en conjunto con ellos.

La gran cantidad de tiempo que esta aplicación permite ahorrar, asimismo permitió realizar sensibilización, actividad prevista anteriormente pero nunca lograda por lo exiguo del tiempo disponible antes de que este método fuera automatizado. En este tipo de problemas, la sensibilización consiste en incluir o eliminar estados, incluir o eliminar nodos, y/o sustituir los valores numéricos entre nodos, etc., permitiendo al estudiante, a partir de un problema primigenio, enfrentar y sojuzgar resultados sometidos a distintas condiciones.

Esta aplicación se enmarca en un programa del autor para informatizar problemas de Programación Dinámica de diferente naturaleza, tales como determinística o probabilística, con situaciones regidas por distribuciones binomiales, normales, de Poisson, etc., como asimismo, integrarlo a problemas económicos que se evalúan con la tasa interna de retorno, el valor actual neto, el costo anual uniforme equivalente, etc., cuyas funcionalidades son también programables en VBA de EXCEL.

REFERENCIAS

- [1] Bellman, Richard E.; Dreyfus, S.E. (1962). Applied Dynamic Programming. Princeton University Press
- [2] Bruges, Ramiro & Duarte, César (2019). Diseño de políticas de reemplazo y mantenimiento de aires acondicionados de expansión directa basadas en programación dinámica y análisis de ciclo de vida de activos. Tesis. Universidad del Norte. Colombia
- [3] Cabrera, Wilmar et al (2012). Optimización de consumo de combustible de vehículos basada en programación dinámica. Dyna. Vol.87, N°5, pp. 574-583
- [4] Carrizo, Gabriel et al (2009). Programación Dinámica aplicada a rotaciones de cultivos sustentables. XXVIII Congreso sobre Métodos Numéricos y Aplicaciones ENIEF 2009
- [5] Díaz, Henry et al (2019). Metodología de programación dinámica aproximada para control óptimo basada en datos. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial. pp.273-283.
- [6] Guajardo, Mario (2007). Programación Dinámica Estocástica en un Problema de Planificación Minera. Tesis Universidad de Chile, Chile.
- [7] Hillier, Frederick S.; Lieberman, Gerald J. (2010) Introducción a la investigación de operaciones. The McGraw-Hill Companies, Inc.
- [8] Mamani, Luiza (2018). Un método recursivo para el problema de programación lineal dinámica. Tesis. Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa, Perú.



- [9] Morice, Matías (2010). Desarrollo de un modelo de programación dinámica para el diseño y operación del embalse Guaiquivilo. Tesis Universidad de Chile, Chile.
- [10] Peña, S.S.& Santiana, S. (2011). Despacho de Unidades en una Central Hidroeléctrica Utilizando Programación Dinámica

ANEXO

```
Const N = 4
Dim inicio, iniciob, S, Nodo1, Nodo2, j, k, o, fila, fil, col, L, q As Integer
Dim Ruta(100) As Double
Dim primero As Boolean
Dim Optimex, p As Double
Sub arma_matriz()
    Cells(inicio, 1) = ""
    For k = 1 To N: Cells(inicio, k + 1) = Cells(k, S): Next k
    For k = 1 To N: Cells(inicio + k, 1) = Cells(k, S - 1): Next k
    inicio = inicio + N + 2
End Sub
Sub distancia()
    For iniciob = 1 * (N + 2) To 5 * (N + 2) Step (N + 2)
        For fil = iniciob + 1 To (iniciob + N)
            For col = 2 To (N + 1)
                Nodo1 = Val(Cells(iniciob, col))
                Nodo2 = Val(Cells(fil, 1))
                If Nodo1 <> 0 Then
                    If Nodo2 <> 0 Then
                        Cells(fil, col) = Cells(Nodo2, Nodo1 + 10)
                    End If
                End If
            Next col
        Next fil
    Next iniciob
End Sub
Sub Optimo_1()
    For fil = (N + 2 + 1) To (N + N + 2)
        p = WorksheetFunction.Min(Range(Cells(fil, 2), Cells(fil, N + 1)))
        If p <> 0 Then
            Cells(fil, N + 3) = p
        Else
            Cells(fil, N + 3) = ""
        End If
    Next fil
End Sub
Sub Optimo_2()
    Z = 1
    For iniciob = 2 * (N + 2) To 5 * (N + 2) Step (N + 2)
        q = Z * (N + 2) + 1
        For col = 2 To (N + 1)
```



```
For fil = (iniciob + 1) To (iniciob + N)
  If Val(Cells(fil, col)) <> 0 Then
    Optimex = Cells(q, N + 3)
    Cells(fil, col) = Cells(fil, col) + Optimex
  End If
Next fil
q = q + 1
Next col
For fil = (iniciob + 1) To (iniciob + N)
  p = WorksheetFunction.Min(Range(Cells(fil, 2), Cells(fil, N + 1)))
  If p <> 0 Then
    Cells(fil, N + 3) = p
  Else
    Cells(fil, N + 3) = ""
  End If
Next fil
Z = Z + 1
Next iniciob
End Sub
Sub Bellman()
fila = 20: inicio = N + 2: primero = True
For S = 6 To 2 Step -1
  arma_matriz
Next S
  Distancia: Optimo_1: Optimo_2
End Sub
Sub limpiar()
  Range("A6:g50").ClearContents
End Sub
Sub test()
  Cells(20, 17) = WorksheetFunction.Min(Range("M20:P20"))
  Cells(21, 17) = WorksheetFunction.Max(Range("M21:P21"))
End Sub
Sub Ruta_Nodos()
For q = 1 To 10
  Cells(30 + q, 10) = Ruta(q)
Next q
End Sub
Sub Ruta_Valor()
suma = 0
For q = 1 To 100
  suma = suma + Optimo(q)
Next q
Cells(30, 10) = suma
End Sub
```

Propuesta de enseñanza del cálculo mediante la metodología Flipped Classroom en estudiantes de Ingeniería

Resumen

Palabras clave: Enseñanza; Flipped Classroom; Cálculo; Educación en ingeniería.

1. RESUMEN

En este trabajo se presenta una propuesta de enseñanza basada en el modelo de aprendizaje invertido para la asignatura de cálculo en varias variables, dirigida a 74 estudiantes de Ingeniería Civil Industrial. La propuesta considera para el desarrollo de la enseñanza elementos como: materiales y recursos diferenciados, sesiones sincrónicas y asincrónicas, y actividades que consideran distintas de representaciones. Además, incorpora la simulación con los recursos computacionales libres Symbolab, WolframAlpha, GeoGebra y Numbas. Permitiendo un acercamiento a los contenidos y sus aplicaciones en contexto.

Los resultados luego de la implementación servirán para determinar la efectividad de la metodología, mejorar la adquisición de los resultados de aprendizaje de la asignatura y proporcionar a los docentes una metodología de enseñanza del cálculo para los ingenieros.

2. INTRODUCCIÓN

Las escuelas de ingeniería están interesadas en estructurar sus carreras orientadas al desarrollo de competencias (Letelier, López y Pérez, 2005), promoviendo un cambio profundo en la readecuación del contenido disciplinario en las ciencias básicas y en la evaluación formativa orientada hacia sus resultados de aprendizaje (Alvarado, Galindo y Retamal, 2018). Esto involucra el desafío de repensar la metodología de enseñanza, suscitando aprendizajes activos de participación y compromiso de los estudiantes, desarrollando habilidades de trabajo autónomo y de equipo con uso de tecnologías.

Las orientaciones sobre la enseñanza del cálculo promueven la innovación metodológica activa con distintos dispositivos didáctico, y cuya efectividad en los estudiantes se favorece con una enseñanza apoyada con recursos tecnológicos. Sin embargo, la experiencia docente indica que, en el nivel universitario, los estudiantes logran comprender algunos conceptos relacionados con el cálculo y con gran dificultad determinar las múltiples aplicaciones intra-matemática (cálculo de derivadas parciales e integrales múltiples, variación de la función en un instante, razón de cambio, aproximación de una función a través de la diferencial total, cálculo de volumen, área, longitud, teorema de Gauss, Teorema de Stoke) y extra-matemáticas (construcción de funciones económicas, de producción y utilidad, resistencia de materiales y fluidos, uso de la derivada parcial en el cálculo de marginales, optimización lineal o no lineales de procesos industriales, uso de la integral múltiple cubicación de materiales).

El objetivo de este trabajo es presentar una propuesta de enseñanza basada en el modelo de aprendizaje invertido en la asignatura de cálculo en varias variables, dirigida a estudiantes de Ingeniería Civil Industrial y que considera un acercamiento global a la comprensión de los contenidos y sus aplicaciones en contexto, con el fin de que los estudiantes alcancen los resultados de aprendizajes declarados en el programa de la asignatura.

3. MARCO REFERENCIAL

Dificultades de aprendizaje en el cálculo en ingeniería.

La asignatura de cálculo es considerada difícil por estudiantes de ingeniería y con bajos niveles de resultados de aprendizaje (Hitt, 2005). Se considera como posibles causas el diseño de nuevos procesos curriculares y su escasa implementación, lo que impide la apropiación por parte de los docentes y la estructura de un programa de actividad curricular extensa y poco flexible. Como consecuencia se presenta una enseñanza dogmática, con predominancia de actividades algebraicas y descontextualizadas, escasa comprensión de conceptos fundamentales por los estudiantes, lo que conlleva a un alto porcentaje de reprobación de la asignatura y un considerable retraso en la malla curricular de las especialidades.

Las Escuelas de Ingeniería están presentando nuevos modelos educativos basados en resultados de aprendizajes; destacando el rol activo del estudiante, la utilización de recursos informáticos y de plataformas virtuales de aprendizaje en la docencia y la preparación del profesorado en metodologías de enseñanza actualizada (Alvarado, Galindo y Retamal, 2018). Esto ha suscitado un interés sobre la enseñanza en asignaturas de Cálculo.

En este trabajo se presenta una propuesta de enseñanza basada en el modelo de aprendizaje invertido para la asignatura de cálculo en varias variables cuyos resultados de aprendizajes son:

RAA1 *Analizar gráficamente una función en dos variables construida con la ayuda de TIC para identificar dominio, recorrido y límite de la función.*

RAA2 *Utilizar derivadas parciales en la resolución de problemas aplicados a la ingeniería.*

RAA3 *Utilizar derivadas parciales para verificar la solución de una ecuación diferencial definida en contexto.*

RAA4 *Modelar problemas aplicados a la ingeniería que conduzcan a la clasificación de extremos de una función.*

RAA5 *Modelar problemas contextualizados que permiten la clasificación de los extremos de una función sujeta a una restricción.*

RAA6 *Determinar el área encerrada entre curvas, utilizando integrales dobles en un problema contextualizado.*

RAA7 *Determinar el volumen de una superficie a través de integrales triples aplicadas en un problema contextualizado.*

RAA8 *Resolver integrales múltiples con cambios de coordenadas en problemas contextualizados.*

RAA9 *Demostrar una actitud responsable hacia las exigencias propias de la asignatura.*

Metodología de Flipped Classroom.

Las TICs son una herramienta indispensable en la incorporación de saberes en forma presencial o virtual, facilitando el trabajo autónomo y colaborativo de los estudiantes (López y Hernández, 2016; Ahumada, 2013), y usadas de forma eficiente pueden provocar cambios sustanciales en la educación (Tourón y Santiago, 2015). La Flipped Classroom es un modelo pedagógico que invierte el proceso tradicional de enseñanza y aprendizaje, es decir, el estudiante adquiere los conocimientos fuera del aula y el profesor utiliza el tiempo de la clase para consolidar los conocimientos mediante actividades de trabajo colaborativo (The Flipped, <https://www.theflippedclassroom.es/>). Este modelo es una instancia de aprendizaje no solo presencial, promueve el uso de diversos recursos tecnológicos y fortalece competencias metacognitivas (Tourón y Santiago, 2015). La metodología favorece el aprendizaje autónomo, desarrolla hábitos, autorregulación y autogestión, el estudiante asume un rol más protagónico de su aprendizaje y el profesor posee más tiempo para individualizar la enseñanza, tiene presente el ritmo de aprendizaje de los estudiantes, promueve la interacción social y la resolución de problemas de forma colaborativa (Aguilera et al., 2017; González y Yáñez 2016; Hernández y Tecpan, 2017; Platero, Tejeiro y Reis, 2015; Martín y Tourón, 2017; Núñez y Gutiérrez, I., 2016). En la literatura son escasas las aplicaciones de esta metodología en asignaturas de cálculo dirigida a estudiantes de ingeniería. No obstante, en los últimos años ha habido un incremento en

las investigaciones referentes a la eficacia y percepción de la metodología flipped classroom (González et al., 2017; Martín y Campión, 2015; Sánchez, Solano y González, 2016; Ojando, Simón, Prats y Ávila, 2016; Torrecilla, 2018) cuyos resultados en general son positivos, los estudiantes declaran satisfacción y motivación luego de implementada dicha estrategia.

Tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en la educación y en la enseñanza del cálculo.

Las TICs son una herramienta indispensable en la incorporación de saberes en forma presencial o virtual, facilitando el trabajo autónomo y colaborativo de los estudiantes (López y Hernández, 2016; Ahumada, 2013), y usadas de forma eficiente pueden provocar cambios sustanciales en la educación (Tourón y Santiago, 2015). En Lagrange et al. (2001) se presentaron los resultados de un meta-análisis de más de 600 publicaciones de los últimos años con informes de investigaciones y experiencias de innovación sobre el uso de las TIC en la Educación Matemática.

La integración de las TIC en el proceso de enseñanza fortalece competencias metacognitivas (Tourón y Santiago, 2015), *“cuando las TIC se utilizan como complemento de las clases presenciales (o como espacio virtual para el aprendizaje, como pasa en los cursos online) podemos considerar que entramos en el ámbito del aprendizaje distribuido, planteamiento de la educación centrado en el estudiante que, con ayuda de las TIC posibilita el desarrollo de actividades e interacción tanto en el tiempo real como asíncronas. Los estudiantes utilizan las TIC cuando quieren y donde quieren (máxima flexibilidad) para acceder a la información, para comunicarse, para debatir temas entre ellos o con el profesor, para preguntar, para compartir e intercambiar información”*, (Márquez, 2012).

En el transcurso de los años las TIC han sido un aporte en los procesos de enseñanza de los distintos objetos matemáticos del cálculo, David Tall et. al (2001) comenta que, de todas las áreas de Matemáticas, el área del cálculo es la que ha recibido el mayor interés e inversión en el uso de la tecnología, ya que permite aproximarse a los conceptos considerando diversas representaciones.

La investigación presentada en Navarro et al. (2016) muestra una secuencia didáctica apoyada en la tecnología para la construcción del concepto derivada en problemas de optimización. Se plantea una actividad a alumnos de Educación Superior con hoja de trabajo, manipulable físico y archivo de GeoGebra para resolver un problema de optimización de contexto de la vida cotidiana. Basándose en el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico para el análisis didáctico de la actividad se obtienen conclusiones entre las que destacamos alguna de ellas. Se considera que el software facilita la visualización de la gráfica de la función que describe la situación problema y la representación de la figura geométrica que interviene. Se determina que la actividad contribuyó a que los estudiantes identificaran las variables involucradas y la pendiente de la recta tangente igual a cero en un punto crítico. Este tipo de actividad permite establecer las bases para la construcción del concepto de derivada por medio de la pendiente de la recta tangente con el apoyo de la tecnología.

4. METODOLOGÍA

Participantes

Participaron en la investigación 74 estudiantes que pertenecen a la carrera de Ingeniería Civil Industrial de la Facultad de Ingeniería, con edades entre 21 y 22 años, de una universidad chilena.

El plan de estudios de Ingeniería Civil Industrial considera la asignatura de cálculo en varias variables el 4to semestre académico, y tiene como prerrequisito el curso de cálculo integral.

Bases para una propuesta didáctica.

El plan de intervención consideró, para el desarrollo de la enseñanza del cálculo en varias variables, los siguientes elementos:

- Resultados de aprendizajes.
- Acción didáctica.
- Materiales y recursos. Capsulas educativas, softwares matemáticos gratuitos.
- Sesiones sincrónicas y asincrónicas. La trayectoria didáctica considera sesiones sincrónicas y asincrónicas dirigidas por el docente. Las sesiones sincrónicas se desarrollan en los horarios establecidos y requieren de la interacción del estudiante. Sin embargo, las sesiones asincrónicas no tienen horario establecido y considera el trabajo autónomo del estudiante.
- Tipos de actividades diferenciadas.

Desarrollo de la enseñanza

A continuación, por motivos de espacio, se considera una tabla 1 del desarrollo de la enseñanza del primer resultado de aprendizaje utilizando la metodología propuesta:

Semana	RAA (Resultado Aprendizaje Aprendido)	Tipo sesión	Contenidos	Acción didáctica	Descripción la acción didáctica (Bloom)	Plazos (horas)	Tipo de actividad
1		Sincrónica	Introducción a software GeoGebra, WolframAlpha, SymboLab	Conocer metodología	Se explica METODOLOGIA DE FLIPPED CLASSROOM	1,5	
				Introducir TIC		1,5	Computacional
2	RAA1: Analizar gráficamente una función en dos variables construida con la ayuda de TIC para identificar dominio, recorrido y límite de la función.	Asincrónica	• Funciones en varias variables. • Dominio y recorrido de una función en dos variables.	Visualiza e interactua con Video_1_1	Comprende los contenidos semanales mediante la visualización del video_1_1 y los aplica en dos actividades interactivas	0,5	Algebraica
			• Dominio y recorrido de una función en dos variables. • Gráficas de superficies. • Curvas de nivel.	Visualiza e interactua con Video_1_2	Comprende los contenidos semanales mediante la visualización del video_1_2 y los aplica en dos actividades interactivas	0,5	Computacional
		Sincrónica	• Evaluación de Funciones en varias variables. • Gráficas de curvas y regiones del plano.	Aplica y relaciona conceptos previos	Relaciona concepto de dominio de funciones univariadas con funciones bivariadas utilizando WolframAlpha y/o SymboLab. Dibuja curvas y regiones en dos variables con GeoGebra.	1 hora	Computacional
			• Dominio y recorrido de una función en dos variables. • Curvas de nivel.	• Interactua para activar conocimientos adquiridos • Aplica y analiza los conceptos adquiridos asincrónicamente	Resuelve ejercicios de Dominio, Recorrido y curvas de nivel de Funciones de varias variables: Grafica en 3D, curvas de nivel y dominio de funciones con GeoGebra. Introducción concepto de límite en varias variables.	2 horas	Algebraica/ Computacionañ

Tabla1: Desarrollo de enseñanza de RAA1

5. CONCLUSIONES

La disponibilidad de tiempo y el conocimiento previo de los estudiantes hace que los profesores no presten suficiente atención a su enseñanza. Más aún, en las asignaturas de la línea matemática, predomina la enseñanza formal enfatizando el lenguaje algebraico. Nuestra propuesta de enseñanza considera un acercamiento global por medio de actividades diferenciadas que consideran representaciones gráficas, tabulares, verbales y algebraicas. Esto es hoy posible gracias a los softwares dinámicos con capacidades gráficas y de simulación, así como recursos de applets disponibles en la web. La siguiente etapa en nuestra investigación es experimentar esta propuesta didáctica, evaluando el cumplimiento de los resultados de aprendizaje declarados en el programa de cálculo de varias variables en estudiantes de ingeniería. Esperamos contribuir a una mejor comprensión de la didáctica del cálculo en la universidad.

6. REFERENCIAS

- Aguilera, C., Manzano, A., Martínez, I., Lozano M., & Casiano, C. (2017). El modelo flipped classroom. Universidad de Almería. *International Journal of Developmental and Educational Psychology. Revista de Psicología*, 4(1) 261-266. Recuperado de: <https://doi.org/10.17060/ijodaep.2017.n1.v4.1055>
- Ahumada, M. E. (2013). Las Tic en la Formación basada en Competencias. *Revista Universidad de la Salle*, (60), 141-157.
- Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The development of student's graphical understanding of the derivate. *Journal of Mathematical Behavior* 16 (4), 399-431.
- Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H., & Krathwohl, D. R. (1956). Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals. *Handbook I: Cognitive Domain*. New York: Longmans, Green. Recuperado de: <https://books.google.cl/books?isbn=1579228453>
- Bowden, J. y Marton, F. (2011). La Universidad, un espacio para el aprendizaje: más allá de la calidad y la competencia. *Revista Española de Orientación y Psicopedagogía*, 22(3), 347-351. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4399566>
- Cardozo, A. (2008). Motivación, aprendizaje y rendimiento académico en estudiantes de primer año universitario. *Laurus Revista de educación*, 14(28), 209-237. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=76111716011>
- Flores, A. (2014). Enfoque conceptual del cálculo en la formación de docentes: Ejemplos con uso de tecnología interactiva. *Revista el cálculo y su enseñanza*, 5 (5), 1-26.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113.
- Gómez, I (2005). Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático. *Educación Matemática*, 17 (1), 185-189. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/pdf/405/40517110.pdf>
- González, D., Jeong, J. S., Cañada, F., & Gallego, A. (2017). La enseñanza de contenidos científicos a través de un modelo «Flipped»: Propuesta de instrucción para estudiantes del Grado de Educación Primaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(2), 71-87. Recuperado de: <https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/324223>
- Gutiérrez, L., Buitrago, M. R., & Ariza, L. M. (2017). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. *Revista científica General José María Córdova*, 15(20), 137-153. Recuperado de: <http://www.scielo.org.co/pdf/recig/v15n20/1900-6586-recig-15-20-00137.pdf>
- Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior*. (25), 57-72.
- Hernández-Silva, C., & Tecpan Flores, S. (2017). Aula invertida mediada por el uso de plataformas virtuales: un estudio de caso en la formación de profesores de física. *Estudios Pedagógicos*, 43(3), 193-204.
- Letelier, M., López, L., Carrasco, R., y Pérez, P. (2005). Sistema de competencias sustentables para el desempeño profesional en ingeniería. *Revista Facultad de Ingeniería-Universidad de Tarapacá*, 13(2), 91-96. Recuperado de: <https://scielo.conicyt.cl/pdf/rfacing/v13n2/ART11.pdf>
- Londoño, N., Kakes, A., & Decena, V. (2013). Algunas dificultades en la resolución de problemas con derivadas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 935-942. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/4187/1/Londo%C3%B1oAlgunasALME2013.pdf>
- López, R., y Hernández, M. (2016). Principios para elaborar un modelo pedagógico universitario basado en las TIC. *Revista de Ciencia, Tecnología e Innovación*, 3(4), 1-19. Recuperado de <http://186.46.158.26/ojs/index.php/EPISTEME/article/view/450/241>
- Martín, D., & Campión, R. S. (2015). ¿Es el flipped classroom un Modelo Pedagógico eficaz?. *Comunicación y pedagogía: Nuevas tecnologías y recursos didácticos*, (285), 29-35.
- Martín, D., & Tourón, J. (2017). El enfoque flipped learning en estudios de magisterio: percepción de los alumnos. *Revista Iberoamericana de Educación*, 20 (2).
- Merla, A. E., & Yáñez, C. G. (2016). El aula invertida como estrategia para la mejora del rendimiento académico. *Revista mexicana de bachillerato a distancia*, 8 (16), 67-77.

- Moreno, H. (2017). Valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio de Cálculo Diferencial por los estudiantes. Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Disponible en: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/moreno_reyes.pdf
- Núñez, A., & Gutiérrez, I. (2016). Flipped learning para el aprendizaje de inglés en educación primaria. *Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, (56), 89-102 Recuperado de: http://www.edutec.es/revista/index.php/edutec-e/article/viewFile/654/Edutec_n56_Nu%C3%B1ez_Gutierrez
- Ojando, E. S, Simón, K., Prats, M. A, & Ávila, X. (2016). Experiencia de Flipped Classroom en tres escuelas de educación primaria de Barcelona. *Comunicación y Pedagogía: Nuevas Tecnologías y Recursos Didácticos*, (285-286), 53-58.
- Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) (2013). Enfoques estratégicos sobre las TICS en educación en América Latina y el Caribe. Santiago, Chile: UNESCO. Recuperado de <http://goo.gl/JJpsVs>
- Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, 34(2), 123 – 150.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático sobre la derivada. *Educación Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178. Recuperado de: https://www.ugr.es/~jgodino/eos/Pino-Fan_Mat_Pesquisa%202011.pdf
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *Bolema*, 29(51), 60-89.
- Platero, J., Tejeiro, M., & Reis, F. (2015). La aplicación del Flipped classroom en el curso de dirección estratégica. XII Jornadas internacionales de innovación universitaria educar para transformar: Aprendizaje experiencial, 119-133. Recuperado de: goo.gl/vZR8d2
- Rinaudo, M. C., Chiecher, A., & Donolo, D. (2003) Motivación y uso de estrategias en estudiantes universitarios. Su evaluación a partir del Motivated Strategies Learning Questionnaire. *Anales de Psicología*, 19(1), 107-119. Recuperado de: https://www.um.es/analesps/v19/v19_1/11-19_1.pdf
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24 (1), 85-98.
- Sánchez, M., Solano, I. M, & González, V. (2016). FLIPPED-TIC: Una experiencia de Flipped Classroom con alumnos de Magisterio. *Revista Latinoamericana de tecnología educativa*, 15 (3), 69-81.
- Torrecilla, S. (2018). Flipped Classroom: Un modelo pedagógico eficaz en el aprendizaje de Science. *Revista Iberoamericana de Educación*, 76 (1), 9-22. Recuperado de: <https://rieoei.org/RIE/article/view/2969>
- Touron, J., & Santiago, R. (2015). El modelo Flipped Learning y el desarrollo del talento en la escuela. *Revista de educación*, (368), 196-208.
- Vanegas, E., Bermúdez, Y. y López, L. (2013). Propuesta metodológica en la aplicación de la derivada en Ingeniería Agroforestal. *Ciencia e Interculturalidad*, 17(8). Recuperado de: <https://www.lamjol.info/index.php/RCI/article/view/2639>
- Una versión preliminar ha sido presentada en el undécimo Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, Enero, 2003. https://www.academia.edu/807014/Dificultades_en_el_aprendizaje_del_c%C3%A1lculo
- Hitt, F. (2005). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En J.C. Cortés y F. Hitt. (Eds.), Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza. (pp. 81-108), México: Morevallado Editores.