PROPUESTA METODOLÓGICA PARA USO DE DATOS EXPERIMENTALES EN LOS CURSOS DE MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA: EL CASO DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

Emilio Cariaga López, Universidad Católica de Temuco, ecariaga@uct.cl.

RESUMEN

En este artículo se considera el problema de mejorar las oportunidades de aprendizaje profesionalmente significativas en los cursos de matemática de pregrado para ingeniería. Para lograr estas oportunidades se recurre a los datos experimentales, al ser estos el principal eslabón entre el contenido matemático y el contexto profesional. Como se sabe, el uso de datos reales ha estado tradicionalmente ausente de los cursos de matemática para las carreras de ingeniería. Se propone una metodología basada en la modelación matemática que permite integrar el contenido matemático con los datos experimentales en un contexto de aplicación profesional. La metodología se aplica e ilustra al curso de ecuaciones diferenciales, con el problema de estimar sus parámetros utilizando datos provenientes del mismo fenómeno modelado por dicha ecuación diferencial. El principal resultado de este estudio de diseño conceptual es una metodología aplicable a cualquier curso de matemática, y a cualquier carrera de pregrado, que aspire a lograr aprendizajes profesionalmente significativos en sus estudiantes.

PALABRAS CLAVES: datos experimentales, ecuaciones diferenciales, estimación de parámetros, modelación matemática.

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO en adelante) forman parte de los conocimientos matemáticos fundamentales que todo ingeniero debe poseer (ABET, 2018). Sin embargo, ya no es suficiente para el ingeniero del siglo XXI aplicar un determinado método analítico para resolver una EDO, sobre todo teniendo presente la existencia de abundantes recursos computacionales que lo hacen automáticamente (Christensen, 2018). En realidad, se espera que el ingeniero contemporáneo pueda resolver problemas complejos, para lo cual deberá poseer la capacidad de integrar diversas disciplinas (ABET, 2018; Christensen, 2018; SEFI,2013).

La aplicación del método científico a la resolución de problemas complejos requiere la observación controlada de la realidad, lo cual usualmente da origen a datos experimentales (Velten,2009). Los procesos de concebir, diseñar, implementar y optimizar (Christensen, 2018), se basan, sin duda, en la gestión de diversos tipos de datos experimentales por parte del ingeniero, y en algunas oportunidades en el ajuste de modelos matemáticos, tales como las EDO (Velten,2009). Lamentablemente, muchos de los elementos mencionados anteriormente no se encuentran integrados de manera coherente en las asignaturas de matemática de las carreras de ingeniería. En particular, un curso estándar de EDO *grosso modo* consta de dos secciones (Edwards y Penney, 2008): la presentación de métodos analíticos de resolución, y su aplicación contextualizada a situaciones de la vida real. Un hecho, que se puede verificar con facilidad, es que los libros de texto de EDO no incorporan de manera frecuente, sistemática ni realista el uso de datos experimentales (Edwards y Penney, 2008). Incluso en aquellos textos que presentan al estudiante modelos matemáticos basados en EDO se constata la ausencia del ajuste y/o validación de dicho modelo a datos experimentales (Edwards y Penney, 2008). En términos generales, el estudiante de ingeniería promedio interactúa formalmente con datos experimentales en los cursos de física, estadística, o de especialidad, pero habitualmente no lo hace en los cursos de matemática (Christensen, 2018). En este sentido, estándares europeos, tales como SEFI (2013), para la formación del ingeniero, establecen que el ajuste de curvas a través del método de mínimos cuadrados debe formar parte de la formación matemática fundamental del futuro ingeniero. Por otro lado, ABET(2018) especifica que el ingeniero debe poseer la habilidad de analizar e interpretar datos.

La enseñanza de las EDO ha recibido bastante atención en diversas publicaciones, tales como Carneiro et al. (2010), Chamkar (2016) y, Coto y Suárez (2018), pero sin énfasis en el uso de datos experimentales. Por otro lado, el tema de estimación de parámetros ha sido considerado en cursos de ingeniería más que de matemática (István et al., 2019; Mejri, 2018). Por ejemplo, István et al. (2019) y Mejri (2018) enfatizan la importancia de la estimación de parámetros a partir de datos experimentales en contextos de problemas realistas de diseño en ingeniería.

Un aspecto relevante de nuestra propuesta es el uso de programas computacionales libres y gratuitos en aquellos procesos que requieran el uso de cómputo complejo o intensivo. Esto permite que el estudiante pueda instalar legalmente el software en su computador personal, lo cual resulta indispensable en contextos de vulnerabilidad social, como es el caso de la mayoría de los estudiantes de nuestra universidad. En síntesis, en este artículo se propone una metodología integral basada en la modelación matemática cuyo objetivo es proveer al estudiante de herramientas cuantitativas que le permitan utilizar las EDO de manera realista como modelo matemático vinculado a datos experimentales idóneos.

DESARROLLO

A. Motivación. En los ejercicios 35, 36, 37 y 38, presentados en la página 84 del texto Edwards y Penney (2008), se solicita al estudiante de EDO estimar dos parámetros del modelo logístico utilizando 3 datos experimentales de un total de 21, los cuales se deben seleccionar de manera equiespaciada en el tiempo, con la finalidad de que el sistema de ecuaciones algebraicas se pueda resolver analíticamente. Específicamente, los autores del texto Edwards y Penney (2008) solicitan en el ejercicio 37 aplicar el procedimiento a un conjunto particular de 3 datos, y luego en el ejercicio 38 solicitan repetir la estimación, pero con un conjunto distinto de 3 datos. Claramente, el procedimiento propuesto en el ejercicio 37 es útil en situaciones muy particulares, y consideramos que sólo otorga al estudiante la oportunidad de practicar habilidades algebraicas. Examinando la totalidad del texto Edwards y Penney (2008) se constata que no considera ningún método estándar de estimación de parámetros, y sólo algunos ejemplos con datos experimentales reales. Más adelante en este artículo se desarrollan los detalles algebraicos asociados a estos ejercicios propuestos en la página 84 del texto Edwards y Penney (2008).

B. Propuesta metodológica. La propuesta metodológica de este artículo está basada en el ciclo de modelación matemática, que posee la virtud de integrar y sistematizar las distintas etapas requeridas para la construcción de un modelo matemático, y su validación en términos de datos experimentales. Existen diversas formulaciones del ciclo de modelación matemática, y definiciones de los que es un modelo matemático. Por ejemplo, Ledder (2013) se define un modelo matemático como: “un conjunto autocontenido de fórmulas y/o ecuaciones basadas en una descripción cuantitativa aproximada de un fenómeno real y creado con la esperanza de que el comportamiento que este predice será consistente con el comportamiento real en el cual éste está basado". Por otro lado, Edwards y Penney (2008) considera que el ciclo de modelación matemática consiste en las siguientes etapas: (i) la formulación de un modelo matemático, esto es, la reconstrucción de un problema del mundo real en términos matemáticos, (ii) la resolución del problema matemático resultante, y (iii) la validación e interpretación de los resultados matemáticos en el contexto del problema del mundo real que le dió origen.

En este artículo el modelo matemático consiste en una EDO, formulada en el contexto docente de pregrado del curso de ecuaciones diferenciales para carreras de ingeniería. Usualmente, el curso de ecuaciones diferenciales considera parcialmente la etapa de formulación de la ecuación diferencial, y casi totalmente la etapa de solución del modelo (Edwards y Penney, 2008). Sin embargo, la etapa de validación y/o interpretación casi no es considerada básicamente por razones de tiempo, o por requerir el uso intensivo de datos experimentales. En particular, la validación del modelo matemático consiste en evaluar el nivel de ajuste del modelo a los datos, lo cual podría requerir la estimación de parámetros desconocidos del modelo (Ledder, 2013; Velten, 2009). En la tabla 1 se definen cada una de las etapas que constituyen la propuesta metodológica objeto de este estudio:

ETAPA	EL ESTUDIANTE:
1	Identifica un caso relevante en ingeniería para el cual existen datos experimentales disponibles.
2	Formula una clase de modelos matemáticos idóneos para el caso propuesto.
3	Resuelve el modelo matemático combinando diversas estrategias.
4	Estima los parámetros desconocidos del modelo matemático a partir de los datos experimentales disponibles.
5	Valida el modelo matemático contrastando datos experimentales con datos simulados.
6	Aplica el modelo matemático para fines de control, optimización, o predicción en el contexto del caso propuesto originalmente.

Tabla 1. Propuesta metodológica. Fuente: elaboración propia.

Una característica relevante de esta propuesta metodológica (Paso 1 al 6) consiste en la integración coherente de distintas áreas del saber, existiendo una mayor coherencia con el método científico (Ledder, 2013; Velten, 2009). Además, esta propuesta no es exclusiva para asignaturas de carreras de ingeniería, sino que es aplicable en cualquier curso de ciencias aplicadas o de matemática, en donde se quiera utilizar la matemática como herramienta de apoyo para resolver situaciones de contexto. Las particularidades disciplinarias se expresan, por ejemplo, en la etapa 1 con la situación del mundo real, en la etapa 4 con el uso de los datos experimentales, y en la etapa 6 con la aplicación del modelo al problema de la vida real que le dio origen. En la etapa 2 se utiliza el término "modelo matemático" y no "ecuación diferencial ordinaria" pues resulta aplicable no sólo a esta clase de modelos matemáticos. En esta propuesta se hace explícito el ajuste del modelo a los datos experimentales, y su incorporación al curso de matemática. Para la ejecución de la etapa 4 existen diversas opciones didácticas dependiendo de factores tales como los objetivos de aprendizaje definidos por el profesor, los conocimientos matemáticos previos, y las habilidades computacionales de los estudiantes. Por ejemplo, la etapa 4 podría ejecutarse simplemente utilizando un comando idóneo del software libre Octave (Eaton et al., 2017).

C. Aplicación al curso de ecuaciones diferenciales. En esta sección se ilustra la propuesta metodológica basada en el problema de modelar la población de los EEUU utilizando datos históricos desde el año 1800. El problema consiste en estimar la población de los EEUU para el año 2010 utilizando como datos experimentales los censos poblacionales del año 1800 al año 2000. La tabla 2 informa los datos experimentales disponibles:

Año	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860	1870	1880	1890
Población	5.308	7.240	9.638	12.861	17.064	23.192	31.443	38.558	50.189	62.980
1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
76.212	92.228	106.022	123.203	132.165	151.326	179.323	203.302	226.542	248.710	281.422

Tabla 2. Censo poblacional en EEUU (en millones).

En la figura 1 una representación gráfica de los datos experimentales informados en la tabla 2:

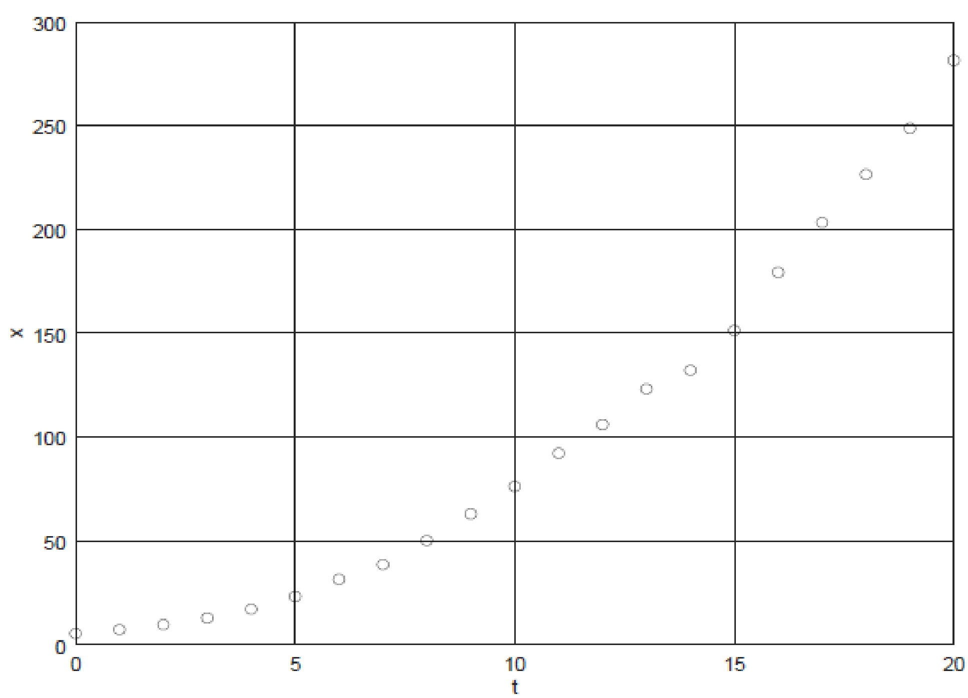

Figura 1. Datos experimentales. Censo poblacional EEUU (en millones).

Las etapas a seguir, según la propuesta metodológica en tabla 1, son las siguientes:

Etapa 1. Dados los datos poblacionales de EEUU desde el año 1800 hasta el año 2000, el problema consiste en hacer un pronóstico de la población de EEUU en el año 2010. Se propone al estudiante utilizar una ecuación diferencial como modelo matemático principal.

Etapa 2. Un modelo matemático usual para este tipo de datos es la ecuación logística $x'(t) = kx(M - x), x(0) = x_0$, en donde, $x_0 = 5.308$, $f(t, x) = kx(M - x)$. La función x representa el número de habitantes censados el año $t \geq 0$, en donde $t = 0$ corresponde al año 1800. La fundamentación de porqué ésta EDO en particular, y no otra, es parte del proceso de formulación del modelo. El docente posee varias opciones al respecto. Por ejemplo, puede introducir al estudiante en los elementos básicos de la demografía.

Etapa 3. La solución analítica del modelo matemático postulado en el Paso 2 está dada por la función

$$x(t; p) = \frac{Mx_0}{x_0 + (M - x_0)e^{-kMt}}, \text{ para } t \geq 0.$$

Etapa 4. Los parámetros de interés son M y k, es decir, $p = (p_1, p_2) = (M, k)$, es el vector de parámetros. En este caso el problema de estimación de parámetros consiste en determinar los valores de My $k$utilizando algún método idóneo. En general, el problema de estimación de parámetros de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, se puede formular como sigue: sean $T > 0$, y $t \in [0, T]$. Considere la función$x = x(t; p)$, con t variable independiente, y $p = p(p_1, p_2, ..., p_m)$, $m = 1, 2,...$vector de parámetros constantes, solución de la ecuación diferencial de primer orden $x' = f(t, x)$sujeta a la condición inicial $x_0 = x(0)$, con f función bivariada que satisface las hipótesis del respectivo teorema de existencia y unicidad para este tipo de problemas con valor inicial. Sea $(t_i, x_i), i = 0, 1, 2,..., n,$ un conjunto de $n + 1$ datos experimentales. El problema de estimación de parámetros consiste en estimar el vector de parámetros p a partir de estos $n + 1$ datos experimentales. El método de mínimos cuadrados consiste en estimar p como aquel valor que minimiza la función objetivo

$$F(p) = F\left(p_1, p_2, ..., p_m\right) = \sum_{i=0}^{n} (x_i - x(t; p))^2.$$

Existen diversas técnicas para optimizar localmente la función multivariada anterior cuya aplicación queda a criterio del profesor, y dependerá principalmente de los antecedentes matemáticos y computacionales de sus estudiantes. Respecto de los antecedentes matemáticos se requerirán herramientas propias del álgebra lineal y del cálculo multivariado. Los aspectos computacionales podrían motivar el uso de software libre o comercial, el uso de diversos lenguajes de programación, y la conexión con otras disciplinas tales como la estadística.

Para este modelo matemático el método de mínimos cuadrados consiste en calcular aquellos valores de$M$y k para los cuales la función bivariada $F = F(M, k)$definida como

$$F(M,k) = \sum_{i=0}^{n} (x_i - x(t_i; M,k))^2 = \sum_{i=0}^{n} (x_i - \frac{Mx_0}{x_0+(M-x_0)e^{-kMt_i}})^2$$

alcanza un valor mínimo.

En lo que sigue se examinan tres procedimientos para estimar los parámetros My k , los cuales se han seleccionado teniendo en consideración su potencial aplicación en un curso de EDO.

a.- Estimación basada en un procedimiento algebraico. Este procedimiento algebraico está propuesto en el ejercicio 36, página 84, del texto Edwards y Penney (2008). Los autores de este texto proponen al estudiante estimar los parámetros k y Mutilizando sólo dos puntos tomados desde la Tabla 2. La población de los EEUU en 1850 (esto es, $t = 50$) fue 23.192 millones, y en el año 1900 (esto es, $t = 100$) fue 76.212 millones. Evaluando la solución analítica en estos datos

$$\frac{5.308M}{5.308+(M-5.308)e^{-50kM}} = 23.192$$
$$\frac{5.308M}{5.308+(M-5.308)e^{-100kM}} = 76.212$$

El texto Edwards y Penney (2008) selecciona este par de datos pues en este caso muy particular se obtienen los factores e^{-50kM} y e^{-100kM} en base a los cuales es posible realizar el cambio de variable $u = e^{-50kM}$, con el cual $u^2 = e^{-100kM}$. Con esto se obtiene que $M = \frac{2abc-(a+c)b^2}{ac-b^2}$, $u = \frac{a}{M-a}\cdot(\frac{M}{b} - 1)$, y $k =- \frac{ln(u)}{50M}$, con $a = 5.308$, $b = 23.192$, $c = 76.212$. Por lo tanto, los valores de los parámetros de interés son $k = 1.677157\cdot10^{-4}$ y $M = 1.881208\cdot10^{+2}$, (o $m = 1/M = 5.3157\cdot10^{-3}$), con los cuales la solución de la ecuación logística está dada por (para $t\geq0$)

$$x(t) = \frac{998.5453}{5.308+182.8128e^{-0.0315508t}}.$$

b.- Estimación basada en el método de mínimos cuadrados.

b.1.- Una primera estrategia para minimizar la función objetivo Fconsiste en sugerir al estudiante que aplique sus conocimientos básicos de cálculo multivariado, es decir, que calcule aquellos valores que anulan el gradiente de la función. En este caso los parámetros M y k se estiman como aquellos valores que resuelven el sistema algebraico no lineal: $\frac{\partial F}{\partial m} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial k} = 0$, en donde la función Fha sido escrita como

$$F(m,k) = \sum_{i=0}^{n} (x_i - \frac{1}{m+(a-m)e^{-(k/m)t_i}})^2,$$

en donde $a = 1/x_0$, y $m = 1/M$, son variables auxiliares. Si se define la nueva función auxiliar $g = g(m,k) = (a - m)e^{-(k/m)t_i}$, se puede calcular que

$$\frac{\partial F}{\partial m} = 2\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{(x_i(m+g)-1)(1+g_m)}{(m+g)^3}, \quad \frac{\partial F}{\partial k} = 2\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{(x_i(m+g)-1)(1+g_k)}{(m+g)^3},$$

con $g_m = \frac{-m^2+(a-m)kt_i}{m^2}e^{-(k/m)t_i}$ y $g_k = t_i(1-\frac{a}{m})e^{-(k/m)t_i}$. Por lo tanto, el problema se reduce a resolver el sistema 2×2de ecuaciones algebraicas no lineales

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(x_i(m+g)-1)(1+g_m)}{(m+g)^3} = 0\ ,\ \sum_{i=0}^{n}\frac{(x_i(m+g)-1)(1+g_k)}{(m+g)^3} = 0.$$

Una forma de resolver este sistema consiste en recurrir al comando *fsolve* de Octave (Eaton et al., 2017) con el cual se obtienen los valores aproximados $m = 3.3784\cdot10^{-3}$(ó $M = 1/m = 2.96\cdot10^{2}$) y $k = 9.6240\cdot10^{-5}$. Note que en este caso

$$F(m,k) = F(3.3784\cdot10^{-3}, 9.6240\cdot10^{-5}) = 1.8536\cdot10^{3}.$$

b.2.- Una segunda estrategia para minimizar la función objetivo Fconsiste en sugerir al estudiante que recurra a los comandos *fminunc*, *fminsearch*, y *lsqnonlin*, de Octave (Eaton et al., 2017) cuyos resultados se resumen en la tabla 3 (se utilizaron como aproximaciones iniciales (m_0, k_0) los valores calculados según la estimación basada en el método algebraico presentado en (a)).

Comando	m_0	k_0	$F(m_0,k_0)$	m_{opt}	M_{opt}	k_{opt}	$F(m_{opt},k_{opt})))$
fminsearch	$5.3157e-03$	$1.6772e-04$	$2.2388e+04$	$5.3508e-03$	186.89	$1.8398e-04$	$2.0354e+04$
lsqnonlin	$5.3157e-03$	$1.6772e-04$	$2.2388e+04$	$4.4315e-03$	225.66	$1.4642e-04$	$9.5441e+03$
fminunc	$5.3157e-03$	$1.6772e-04$	$2.2388e+04$	$3.2270e-03$	309.89	$9.0422e-05$	$1.4629e+03$

Tabla 3. Aplicación de los comandos *fminunc*, *fminsearch*, y *lsqnonlin* de Octave.

Las rutinas en Octave, en base a las cuales se construyó la tabla 2, están disponibles en el anexo

Etapa 5. Claramente, el comando *fminunc* logra una disminución en el error cuadrático F de un 6.5% aproximadamente, a partir del valor inicial $F(m_0, k_0)$ que se obtiene con los estimadores basados en el método algebraico presentado en (a).

Etapa 6. Finalmente, utilizando los valores óptimos calculados con el comando *fminunc* es posible calcular un pronóstico de la población de los EEUU para el año 2010.

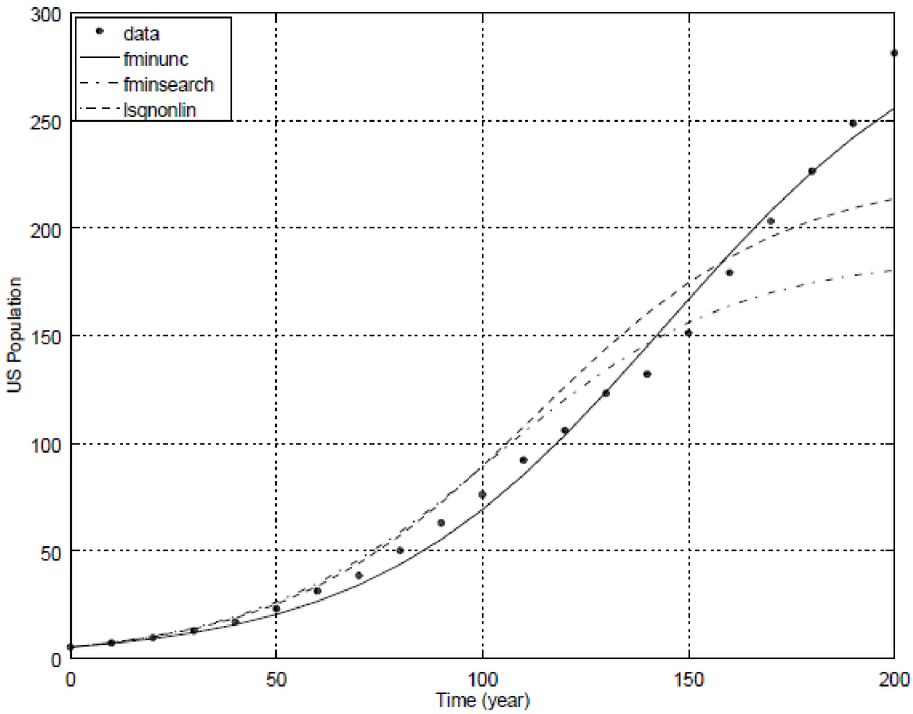

Figura 2. Datos experimentales vs. curvas ajustadas según comandos Octave fminunc, fminsearch, lsqnonlin.

D.- Implementación en aula. El autor de esta propuesta posee más de 20 años de experiencia en la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales, y del Cálculo Numérico en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica de Temuco, ubicada en la ciudad de Temuco, Chile. La mayoría de nuestros estudiantes poseen importantes carencias económicas, y muchos de ellos son la primera generación en su familia que estudia una carrera universitaria. Esta es una de las principales razones que explican el uso de software libre, tal como Octave, en nuestra propuesta metodológica, pues permite que nuestros estudiantes puedan instalarlo legalmente en sus laptops personales, y de este modo poder practicar durante la semana en sus propios hogares. No obstante, nuestra institución cuenta con las licencias legales de diversos programas computacionales de cómputo científico comerciales, los cuales están instalados legalmente en los laboratorios. Nuestra experiencia en aula nos permite aseverar que la aplicación presentada anteriormente se puede ejecutar en dos sesiones de 90 minutos cada una, aproximadamente. Se recomienda que al menos una de las sesiones se lleve a cabo en un laboratorio computacional con el software Octave ya instalado.

Una de las principales dificultades cognitivas que experimenta el estudiante es el distinguir entre datos experimentales, evaluaciones de la solución analítica, y las aproximaciones numéricas. Creemos que una de sus causas es justamente la falta de experiencia en la integración del modelo matemático con los datos experimentales en las asignaturas de matemáticas. Por otro lado, hemos notado que los estudiantes avanzan muy rápido en el uso del software Octave como una herramienta de cálculo. En este sentido, creemos que se puede dejar para cursos más avanzados los fundamentos teóricos de los comandos o métodos de optimización, por ejemplo.

Un concepto muy relevante, cuya comprensión por parte del estudiante se ve muy fortalecida a partir de esta propuesta, es el hecho de que el nivel de ajuste de la solución analítica, o numérica de la EDO, a los datos experimentales, dependerá del método utilizado para estimar los parámetros relevantes, que en este caso son M y k. Consideramos un avance significativo sobre la metodología tradicional acercar al estudiante a este tipo de comprensión en un primer curso de EDO.

RESULTADOS

La principal contribución de este estudio es el diseño de una propuesta metodológica basada en el ciclo de modelación matemática cuya principal virtud es integrar diversos aspectos que usualmente se presentan de modo disperso al estudiante, como son el contenido matemático y los datos experimentales. Otro aporte es mostrar explícitamente cómo puede hacerse esto en un curso de ecuaciones diferenciales recurriendo al método de estimación de parámetros, el cual como se sabe usualmente forma parte de la asignatura de estadística.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha considerado el problema que consiste en mejorar las oportunidades de aprendizaje profesionalmente significativo en los cursos usuales de matemática para las carreras de ingeniería. El eje de esta propuesta es el uso de datos experimentales en el marco provisto por la modelación matemática. Como ilustración de su aplicabilidad se ha considerado el curso de ecuaciones diferenciales, y el problema relacionado de estimar él o sus parámetros utilizando el método de mínimos cuadrados, lo cual motiva y requiere el uso de software científico.

La metodología propuesta en este artículo es aplicable a otros cursos de matemática y a otras carreras profesionales, lo cual a nuestro juicio constituye su principal fortaleza y novedad, junto con relevar la importancia del uso de datos experimentales en cursos tradicionalmente teóricos como son los del área matemática. De este modo, y como continuación de este trabajo, se propone construir experiencias de aprendizaje similares en otros cursos de matemática y para otras carreras profesionales.

A partir del diseño conceptual propuesto en este estudio se planea ejecutar una primera implementación en aula a escala piloto con el objetivo de validar esta propuesta, y observar la ganancia cognitiva neta que alcanzan nuestros estudiantes.

AGRADECIMIENTOS

Al Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas de la Universidad Católica de Temuco.

REFERENCIAS

ABET (Accreditation Board for Engineering and Technology) (2018). Engineering Accreditation Commission, *2019-2020 Criteria for accrediting engineering programs*.

Carneiro, F., et al. (2010). Teaching differential equations in different environments: A first approach, *Comput. Appl. Eng. Educ.,* 18(3), 555-562.

Chamkar, P.M. (2016). Pedagogy of second order homogeneous differential equations: A holistic approach using a Matlab workbook, *Comput. Appl. Eng. Educ*., 24(1), 114-121.

Christensen, H.P. (2018), Math for engineering students. In *Proceedings of the 14th International CDIO Conference*, 202-211.

Coto, B., Suárez, I. (2018). Euler algorithm to solve reaction kinetic equations: Mathematical formulation, programing, and applications, *Comput. Appl. Eng. Educ.*, 26(1), 29-36.

Eaton, J.W., et al. (2017). *GNU Octave version 4.2.1 manual: a high-level interactive language for numerical computations*.

Edwards, C.H., Penney, D.E. (2008). *Elementary differential equations*, Sixth edition, Pearson Education Inc.

István, M., et al. (2019). From modeling to virtual laboratory development of a continuous binary distillation column for engineering education using MATLAB and LabVIEW, *Comput. Appl. Eng. Educ.*, 27(5), 1-11.

Ledder, G. (2013). *Mathematics for the Life Sciences: Calculus, Modeling, Probability, and Dynamical Systems*, Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology.

Mejri, S., et al. (2018). A model parameter estimation method using Mathematica© applied to transient chemical engineering processes, *Comput. Appl. Eng. Educ*., 26(5), 1405– 1421.

SEFI (European Society for Engineering Education) (2013). *A framework for mathematics curricula in engineering education: a report of the mathematics working group*.

Velten, K. (2009). *Mathematical modeling and simulation: introduction for scientists and engineering*, WILEY-VCH.