Hallazgos históricos-epistemológicos sobre el cálculo diferencial para la docencia centrada en el aprendizaje.

Patricio Orrego
Universidad Del Desarrollo
p.orrego@udd.cl

RESUMEN

Este trabajo reporta a la comunidad interesada en la enseñanza del cálculo diferencial algunos hallazgos realizados en una investigación de mayor alcance. La divulgación de este conocimiento resultará de utilidad en una docencia que pretenda alejarse del academicismo extremo y que se enfoque en un acercamiento intuitivo de las nociones y conceptos del cálculo diferencial, permitiendo enfrentar de mejor modo algunos obstáculos generados por programas de estudio que priorizan los formalismos matemáticos antes que la comprensión de los estudiantes. La incorporación de estos hallazgos en las prácticas de aula permitirá a los docentes ayudar a que los estudiantes conecten de mejor modo el álgebra escolar y la geometría clásica con los nuevos conceptos y procedimientos que trae consigo el aprendizaje del cálculo diferencial.

PALABRAS CLAVES: APOE, regla del producto, didáctica del cálculo, reglas de derivación, descomposición genética.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza del cálculo en escuelas de ingeniería data de la fundación de la École Polytechnique de París en 1794, donde dictó conferencias de cálculo diferencial Joseph-Louis Lagrange y fueron profesores también Poisson y Fourier, entre otros importantes matemáticos y físicos. Como se podrá intuir –debido a los notables matemáticos y físicos que enseñaron en sus aulas– la enseñanza matemática de la institución se acercó más a la de un centro de investigación científico-matemático que a la de una institución de naturaleza aplicada, aunque no deben omitirse los avances de Fourier en el estudio del problema de la difusión del calor y otros de corte aplicado generados bajo su alero. Esta tradición, anclada en la abstracción y la formalización teórica, en la enseñanza de la matemática en escuelas de ingenieros fue un canon usado en gran parte del mundo, incluido nuestro país, repercutiendo aún en nuestras aulas.
Las investigaciones que ponen de manifiesto los problemas que afectan a la enseñanza del cálculo diferencial –e integral– a nivel universitario son numerosas. Algunas hacen mención a una enseñanza centrada en lo algorítmico y en lo algebraico (Artigue, 1995; Yusof y Tall, 1995), en desmedro de facetas geométricas y de aplicabilidad (modelación matemática) inherente a los orígenes históricos del cálculo diferencial. Lo anterior pone de manifiesto una realidad inquietante: si bien los estudiantes son capaces de aprender de forma más o menos mecánica algunos procedimientos básicos del cálculo, en realidad no lo comprenden profundamente y, en particular, presentan problemas para aprender algunas de las reglas de derivación. Es por ello que la investigación principal, de la cual se extraen los elementos que se presentarán en este trabajo, se enfoca en el aprendizaje de la regla de derivación del producto para funciones reales de una variable, entre otros temas.

CONTEXTO DE LOS HALLAZGOS

Como fue mencionado, este trabajo se halla inmerso dentro de una investigación más profunda y amplia. En dicha investigación principal se utiliza un marco teórico propio de la didáctica de la matemática. Este marco teórico provee de un modelo cognitivo que explica cómo se adquiere el conocimiento matemático, en particular, el conocimiento matemático de nivel superior.

En concreto, el marco teórico al que adscribe esta investigación es el de la teoría APOE, acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema, propuesto por Ed Dubinsky (1991). En la APOE el conocimiento se sustenta en estructuras mentales que un individuo construye a medida que avanza en su comprensión de un cierto fragmento de la matemática. Estas estructuras llamadas *Acción*, *Proceso*, *Objeto*, y *Esquema* son formadas por mecanismos mentales llamados *interiorización*, *encapsulación*, *reversión*, *generalización*, y otros.

La estructura mental por la cual un aprendiz de un determinado objeto matemático inicia su comprensión es la *Acción*. Esta estructura se caracteriza porque su puesta en marcha se produce sólo cuando el individuo percibe un estímulo externo que gatilla su actividad. Si un aprendiz reflexiona sobre esta *Acción*, y la internaliza –la hace propia– mediante el mecanismo mental de *interiorización*, dará origen a una nueva estructura mental llamada *proceso*. Un proceso se caracteriza porque su puesta en marcha no requiere de un estímulo percibido como externo sino que depende del individuo intrínsecamente.

Es así como los diversos mecanismos mentales generan nuevas estructuras mentales a partir de las ya existentes; no es que estas se transformen o desaparezcan, si no que todas las estructuras mentales (*Acciones* y *Procesos*) conviven e interactúan dentro de un *objeto* mental o eventualmente dentro de un *Esquema* mental, formado durante el recorrido cognitivo que realiza el estudiante en pos de alcanzar la comprensión del objeto matemático en estudio.

El sistema que describe las estructuras y mecanismos mentales que se precisan para la comprensión de un fragmento de la matemática se denomina *Descomposición Genética* (DG) y a continuación, se presenta un diagrama (ver Figura 1) que resume la DG levantada en la investigación principal. Esta DG delimita y define las estructuras y mecanismos que se proponen como necesarios para la comprensión de la regla de derivación del producto de funciones reales de una variable.

Los hallazgos presentados en este trabajo provienen del estudio histórico-epistemológico realizado en torno al contenido matemático específico, es decir, de los orígenes históricos y matemáticos de la regla de derivación del producto; dicho estudio histórico-epistemológico es el que permitió conjeturar el modo en que los estudiantes aprenden esta regla de derivación y, por tanto, proponer la DG.

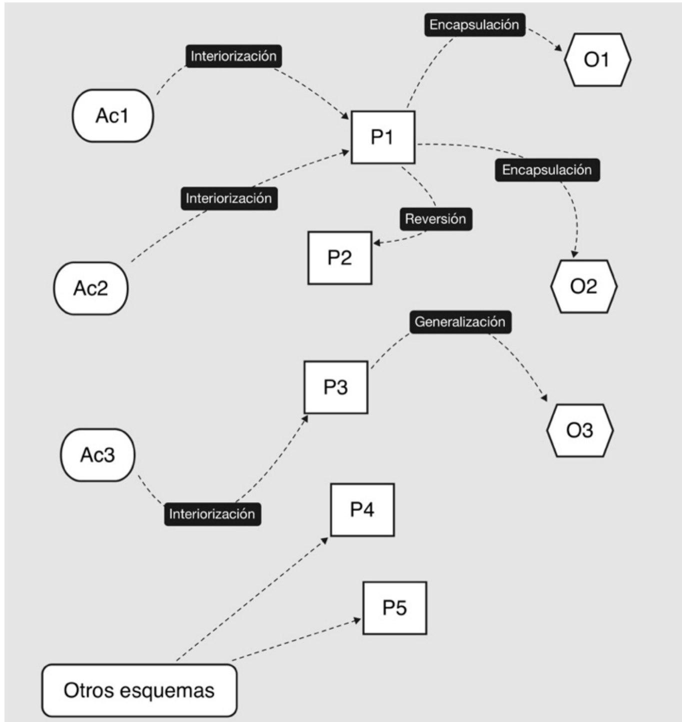
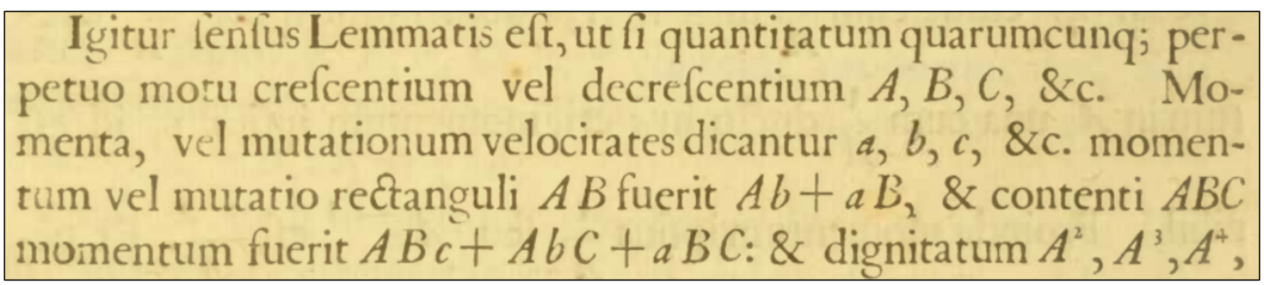


Figura 1: Diagrama DG regla del producto tomada de la tesis de grado del autor del presente trabajo.

HALLAZGOS EN LA REGLA DEL PRODUCTO.

A continuación, se describirán los hallazgos en orden histórico, comenzando con la aparición de la regla del producto en los *Principia Mathematica* de Newton de 1687 presentada en la Figura 2.



Igitur ſenſus Lemmatis eſt, ut ſi quantitatum quarumcunq; per-
petuo motu creſcentium vel decreſcentium A, B, C, &c. Mo-
menta, vel mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momen-
tum vel mutatio rectanguli AB fuerit $Ab + aB$, & contenti ABC
momentum fuerit $ABc + AbC + aBC$: & dignitatum A^2, A^3, A^4,

Figura 2.

Newton nos da una demostración de la regla del producto en una antigua forma geométrica sintética, que detallaremos más adelante. Para entender su proceder debemos considerar el contexto sociocultural de Newton y su fin último para la escritura de los *Principia*: la geometría clásica como canon de referencia y que se propuso describir leyes físicas. Lo anterior queda de manifiesto en la tercera línea del texto de la Figura 2: “el momentum, o cambio del rectángulo sería…”

En The history of calculus and its conceptual development (1939) de Carl Boyer aparece traducida del latín la demostración dada por Newton de la regla del producto (Figura 2), cuya traducción al español mostramos a continuación:

> Newton demostró esto primero para el producto AB de la siguiente manera: Sea AB un rectángulo y los lados A y B [ahora deje que] disminuyan en 1⁄2a y 1⁄2b respectivamente. El área disminuida será AB - 1⁄2aB - 1⁄2bA + 1⁄4ab. Ahora deje que los lados de AB se incrementen en 1⁄2a y 1⁄2b respectivamente. El área del rectángulo agrandado será AB + 1⁄2aB + 1⁄2bA + -1⁄4ab. Restando el rectángulo más pequeño del más grande, se obtiene aB + bA como el momento del rectángulo original, correspondiente a los momentos a y b de A y B; lo que prueba la propuesta de este producto.
>
> (traducción propia del original en inglés)

En la Figura 3, representamos y explicamos los detalles del párrafo anterior:

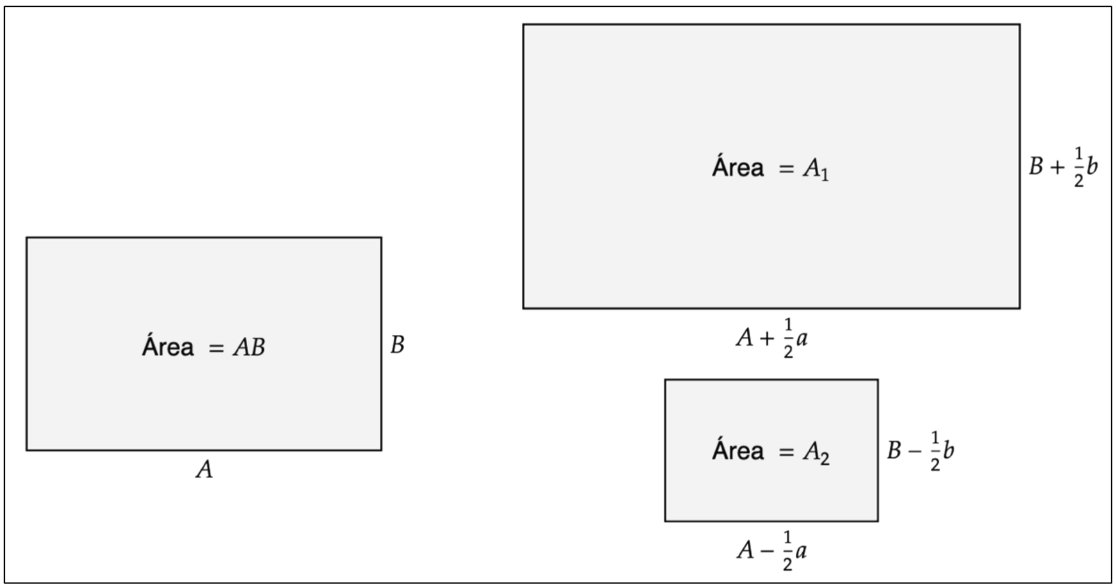


Figura 3

Desde la Figura 3 resulta evidente que

$$A_1 = \left(A + \frac{1}{2}a\right)\left(B + \frac{1}{2}b\right) = AB + \frac{1}{2}Ab + \frac{1}{2}Ba + \frac{1}{4}ab$$

y que

$$A_2 = \left(A - \frac{1}{2}a\right)\left(B - \frac{1}{2}b\right) = AB - \frac{1}{2}Ab - \frac{1}{2}Ba + \frac{1}{4}ab$$

En seguida, Newton nos explica que la variación o momento de área original AB viene dada por:

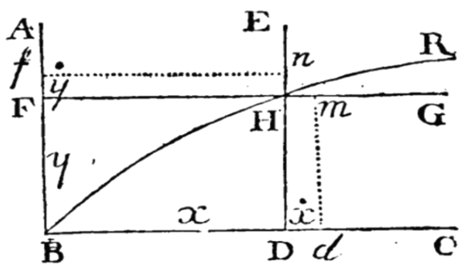
$$\text{Variación área rectángulo} = \Delta(AB) = A_1 - A_2$$

En concreto,

$$\Delta(AB) = AB + \frac{1}{2}Ab + \frac{1}{2}Ba + \frac{1}{4}ab - AB + \frac{1}{2}Ab + \frac{1}{2}Ba - \frac{1}{4}ab = aB + Ab \quad \blacksquare$$

Por otra parte, es necesario considerar que Boyer y otros historiadores de la matemática describen a los *Principia* de Newton como poco claros, incluso ambiguos, particularmente al momento de definir sus fluxiones, permitiendo su confusión con cantidades infinitamente pequeñas, o con cantidades límites. Lo anterior llevó a que al poco tiempo la obra de Newton cayera en desuso. Es muy posible que este contexto motivara al matemático inglés Thomas Simpson (1710-1761) a estudiar y analizar la obra de Newton y, finalmente, lo llevara a autoimponerse la misión de divulgar y explicar las mal entendidas —según Simpson— fluxiones. Simpson para tal efecto publica en 1737 su *Treatise of Fluxions*. La explicación dada por Simpson en su tratado para la regla del producto se presenta en la Figura 4(a). Además, en la Figura 4(b) presentamos otra interpretación y demostración de la misma regla publicada por Agnesi en *Instituzioni Analitiche* de 1748.

Conceive two Right-lines DE and FG, perpendicular to each other, to move, from two other Right-lines, BA and BC, continually parallel to themſelves, and thereby generate the Rectangle DF. Let the Path of their



Interſection, or the Loci of the Angle H, be the Line BHR; alſo let D*d* ($\dot{x}$) and F*f* ($\dot{y}$) be the Fluxions of the Sides BD (x) and BF (y), and let *dm* and *fn*, parallel to DH and FH, be drawn. Therefore, becauſe the Fluxion of the Space or Area BDH is truly expreſſed by the Rectangle D*m* ($= y\dot{x}$ *) and that of the Area, or Space BFH, by the Rectangle F*n*, and equal Quantities have equal Fluxions, it follows that the Fluxion of the Rectangle $xy =$ DF ($=$ BDH $+$ BFH) is truly expreſſed by $\dot{y}x + \dot{x}y$. Q. E. I. * Art. 4.

B 4 The

(a) tomada de *Treatise of Fluxions* (1737, T.Simpson)

26. But if the quantity propoſed to be differenced ſhall be the product of ſeveral variables, as xy; becauſe x becomes $x + \dot{x}$, and y becomes $y + \dot{y}$, and xy becomes $xy + y\dot{x} + x\dot{y} + \dot{x}\dot{y}$, which is the product of $x + \dot{x}$ into $y + \dot{y}$; from this product ſubtracting, therefore, the propoſed quantity xy, there will remain $y\dot{x} + x\dot{y} + \dot{x}\dot{y}$. But $\dot{x}\dot{y}$ is a quantity infinitely leſs than either of the other two, which are the rectangle of a finite quantity into an infiniteſimal. But $\dot{x}\dot{y}$ is the rectangle of two infiniteſimals, and therefore is infinitely leſs, and muſt be ſuppoſed entirely to vaniſh. The fluxion, therefore, of xy will be $x\dot{y} + y\dot{x}$.

(b) tomada de *Instituzioni Analitiche* (1748, M.Agnesi)

Figura 4.

Las demostraciones de las figuras 4(a) y 4(b) pueden ser entendidas actualmente como distintos enfoques o interpretaciones de los elementos descritos en los *Principia Mathematica*. Son estos enfoques los que nos permiten construir una demostración didáctica, geométrica e intuitiva de la regla del producto que resulta idónea para la enseñanza del cálculo y que presentamos a continuación, en la Figura 5.

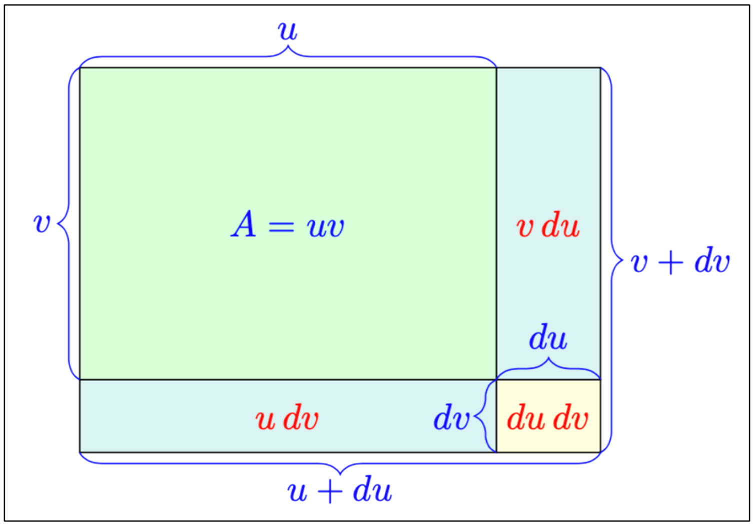


Figura 5.

A continuación, explicamos los elementos introducidos en la Figura 5.

$$
\begin{aligned}
A + dA &= (u + du)(v + dv) && (1)\\
&= uv + udv + vdu + dudv && (2)\\
&\text{note que } dudv \ \to 0 && (*)\\
&= uv + uv' + u'v && (3)\\
A + dA &= uv + u'v + uv' && (4)\\
&\text{pero } A + dA = uv + d(uv), \text{ luego}\\
&uv + d(uv) = uv + u'v + uv'\\
&\text{lo que finalmente resulta en } d(uv) = (uv)' = u'v + uv' \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

La demostración precedente utiliza la notación diferencial para los infinitesimales que aparecen en las líneas (1), (2) y (4). La notación prima (´) para la derivada que se introduce en las líneas (3), (4) y en la línea final se escoge por lo familiar que resulta para los estudiantes.
Note el sentido geométrico que poseen las expresiones udv, vdu y $dudv$ ya que pueden ser interpretadas como las áreas de los subrectángulos laterales al rectángulo central (verde) de la Figura 3.
Analicemos con más detalles la afirmación de la línea $(*)$: dado que du y dv son infinitesimales, es decir, cantidades muy pequeñas, virtualmente cero, es intuitivo aceptar para los estudiantes que el producto $dudv$ tienda a cero. Es sabido que estas “cantidades evanescentes” fueron motivo de críticas por Berkeley y otros, que empujaron a los analistas del siglo XIX a encontrar los fundamentos del cálculo. Sin embargo, es justamente este contexto el que puede ser usado para introducir la necesaria –y a veces precipitada– formalización de los conceptos por medio de los límites, pero solo una vez que los estudiantes se han aproximado de forma intuitiva a dichos conceptos.
Por otra parte, cabe destacar que en diversas investigaciones en didáctica de la matemática se concluye que definir objetos matemáticos nuevos a través de otros objetos se puede transformar–eventualmente– en un obstáculo para el aprendizaje del nuevo concepto. Lo anterior, claro está, si es que el objeto usado como vehículo aún no es comprendido a cabalidad por el aprendiz.

Nos referimos puntualmente a la siguiente situación: en un curso tradicional de cálculo diferencial, de unos pocos meses, se suele enseñar derivadas (y sus reglas) vía límites cuando aún el estudiante lucha por comprender la noción de límite (tal vez incluso no comprende qué es una función ya que usualmente se parte con ese contenido). Si a esto agregamos una enseñanza de límites centrada más bien en técnicas de cálculo (algoritmos y métodos) y no en desarrollar otras facetas del límite más útiles en un contexto de enseñanza para ingenierías, es natural presumir la formación de obstáculos para el estudiante.
Esta propuesta de aproximación permitiría evadir, por un tiempo, esa dificultad evitando así posibles obstáculos. Nuestra propuesta general no es eliminar la formalización, no estamos contra ella. Proponemos retrasar el acceso al concepto por esa vía, por lo menos hasta que el estudiante se encuentre en condiciones de conectar el nuevo concepto con otros ya conocidos e interiorizados, aumentando así las posibilidades de éxito en su camino por alcanzar la comprensión de este conocimiento específico.
Por último, comentamos que desde diversas investigaciones en didáctica de la matemática se recomienda promover la diversidad de formas de representar y presentar los conceptos y objetos matemáticos, ya que esta variedad es que permitiría la real comprensión de los objetos.

CONEXIONES INSOSPECHADAS

Una conexión no evidente quedo de manifiesto al proponer en la DG que, a partir de la derivación –usando regla del producto– de expresiones regulares de la forma:

$$(cos\, x)^2 \text{ ó } (sin\, x)^3 \text{ , o en general } u^n \qquad (\star)$$

Donde u es una función elemental y n es un número natural, los estudiantes podrían llegar a concluir que

$$[u^n]' = n\, u^{(n-1)} u'$$

Lo anterior podría no ser novedad para un matemático profesional; sin embargo, lo relevante es que tanto el autor del presente trabajo como María Agnesi (1718-1799) en su obra *Instituzioni Analitiche* de 1748 lo conjeturan de forma independiente, y proponen –de forma explícita– la relación entre la derivación de este tipo de expresiones regulares y la regla de la cadena. Ambos autores plantean su uso como herramienta didáctica para inducir la regla para la derivada de la potencia enésima de una función.

En la Figura 6 aportamos la evidencia respecto de la relación previamente descrita respecto de Agnesi.

Finalmente, consideramos aconsejable procurar inducir a los estudiantes esta ruta cognitiva con el fin de generar mejores condiciones para el aprendizaje de la regla de cadena que tantas dificultades acarrea en el aprendizaje del cálculo diferencial.

Now let us find the fluxions of powers, and, first, of perfect and positive powers, that is, whose exponents are positive integer numbers; for example, of x^2. But xx is the product of x into x, and therefore, by the rule of products, it's fluxion will be $\dot{x}x + x\dot{x}$, that is, $2x\dot{x}$. To find the fluxion of x^3. Now this is the product of x into x into x, and therefore the fluxion will be $xx\dot{x} + xx\dot{x} + xx\dot{x}$, that is, $3xx\dot{x}$. And, as we may proceed in the same manner *in infinitum*, the fluxion of x^m, m being any positive integer, will be $mx^{m-1}\dot{x}$.

Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana (Vol. 2), Agnesi M.

Figura 6.

REFLEXIÓN FINAL

A modo de resultado, en este trabajo de divulgación presentamos (ver Figuras 7 y 8) un extracto de una producción de un participante de la toma de datos para la validación de la DG propuesta.

5. Considera la siguiente función:

$$h(x) = \ln^2 x = \ln x \ln x, \quad f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

obten $h'(x)$ solo usando regla del producto. Ahora obtén $g'(x)$ con

$$g(x) = f^3(x) = f(x)f(x)f(x) \text{ , por simplicidad, escribe } g = fff$$

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(\ln x \cdot \ln x) \ \boxed{\begin{aligned} &= \frac{d}{dx}\ln x \cdot \ln x + \ln x \cdot \frac{d}{dx}\ln x \\ &= \frac{1}{x}\cdot \ln x + \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln(x)}{x} \end{aligned}}$$

(1)

$$g(x) = f(x)\cdot f(x)\cdot f(x).$$

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left[(f(x)\cdot f(x))\cdot f(x)\right].$$

$$= \frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot f(x)\right]\cdot f(x) + f(x)\cdot \frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot f(x)\right].$$

$$= \left[\frac{d}{dx}f(x)\cdot f(x) + f(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)\right]\cdot f(x) + f(x)\cdot\left[\frac{d}{dx}f(x)\cdot f(x) + f(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)\right]$$

$$= \left[f'(x)\cdot f(x) + f(x)\cdot f'(x)\right]f(x) + f(x)\left[f'(x)\cdot f(x) + f(x)\cdot f'(x)\right].$$

$$= f'(x)\cdot f^2(x) + f'(x)\cdot f^2(x) + f^2(x)\cdot f'(x) + f'(x)\cdot f^2(x)$$

$$= 4\cdot f'(x)\cdot f(x)\cdot f(x).$$

error. no hice bien el producto.

$$= \frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot f(x)\right]\cdot\left[f(x)\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot f(x)\right]\cdot f(x) + f(x)\cdot f(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)$$

$$= \left[\frac{d}{dx}[f(x)]\cdot f(x) + f(x)\cdot\frac{d}{dx}[f(x)]\right]\cdot f(x) + f(x)\cdot f(x)\cdot f'(x)$$

$$= \left[2f'(x)\cdot f(x)\right]\cdot f(x) + f(x)\cdot f(x)\cdot f'(x).$$

$$= 2\cdot f(x)\cdot f(x)\cdot f'(x) + f(x)\cdot f(x)\cdot f'(x)$$

$$\boxed{= 3\cdot f(x)\cdot f(x)\cdot f'(x).}$$

(2)

Figura 7.

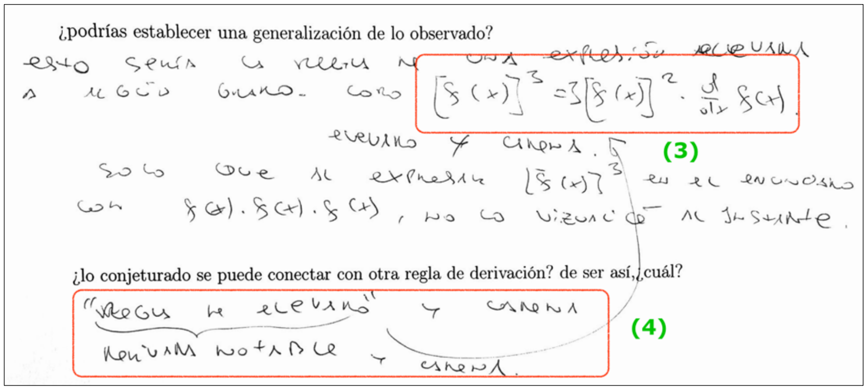


Figura 8.

En la Figura 7 en (1) y (2), vemos al informante derivando las expresiones regulares que proponemos en (⋆). En la Figura 8 en (3), nuestro informante detecta la conexión entre la regla del producto y la regla de la cadena propuesta por Agnesi e incluso en la Figura 8 en (4) el estudiante es capaz de describir la conexión de forma explícita.

Lo anterior, junto a otras producciones similares en las que también observamos lo predicho por nuestra propuesta, nos permitió considerar validada la DG.

Por último, esta validación nos permite sostener que los hallazgos realizados en la investigación pueden ser elementos de ayuda para los docentes que imparten la asignatura de cálculo diferencial procurando que sus estudiantes vean más allá de simples y monótonas reglas de cálculo, o fórmulas como ellos las suelen llamarlas, y logren adentrarse en los conceptos, métodos y técnicas del cálculo más que en solo algoritmos.

REFERENCIAS

Agnesi, M. G. (1801). Analytical Institutions, trans. *John Hellins, London*.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática.

Boyer C. (1939). The History of the Calculus and Its Conceptual Development. *Dover publications, inc., New York.*

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 160-202). Springer, New York, NY.

Newton, I. (1687). Philosophiae naturalis principia mathematica.

Simpson, T. (1776). The doctrine and application of fluxions: Containing besides what is common on the subject, a number of new improvements in the theory, and the solutions of a variety of new and very interesting problems in different branches of the math. *John Nourse*.

Yusof, M. Y., & Tall, D. (1995). Professors' perceptions of students' mathematical thinking: Do they get what they prefer or what they expect. *Proceedings of PME*, *19*, 170-177.