Una propuesta de enseñanza de la derivación implícita para estudiantes de ingeniería basada en la teoría APOE

Claudio Fuentealba, Universidad Austral de Chile, cfuentealba@uach.cl
Andrea Cárcamo, Universidad Austral de Chile, andrea.carcamo@uach.cl

RESUMEN
Este artículo presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivación implícita a estudiantes de ingeniería, basada en la teoría APOS (Acción-Proceso-Objeto-Esquema). Se parte de un análisis de las dificultades y errores comunes de los estudiantes en este tema, identificados en investigaciones previas. La propuesta consta de una secuencia de actividades diseñadas para promover la construcción mental de los conceptos involucrados, desde Acciones concretas hasta la formación de Esquemas mentales. Se enfatiza la coordinación entre las representaciones gráfica y analítica, así como la comprensión conceptual de la función implícita. Se incluyen sugerencias para la implementación en el aula y el uso de software de graficación. Se discuten las ventajas potenciales de este enfoque para superar los obstáculos de aprendizaje identificados y desarrollar una comprensión más profunda de la derivación implícita en los estudiantes de ingeniería.

PALABRAS CLAVES: Derivación implícita, Enseñanza del Cálculo, Teoría APOE, Errores conceptuales, Comprensión gráfica

INTRODUCCIÓN
La derivación implícita es un tema fundamental en los cursos de Cálculo para ingeniería, con importantes aplicaciones en diversas áreas como mecánica, termodinámica, electromagnetismo y control automático (Willcox y Bounova, 2004). Sin embargo, las investigaciones muestran que los estudiantes suelen tener dificultades significativas para comprender y aplicar este concepto (Borji y Martínez-Planell, 2020; Kandeel, 2021; Tarmizi, 2010). Algunos de los problemas identificados incluyen la falta de comprensión de la naturaleza de las funciones implícitas, dificultades para coordinar las representaciones gráfica y analítica, y errores en la aplicación de las reglas de derivación (Chu, 2019; Orton, 1983).
Este artículo presenta una propuesta didáctica para abordar estas dificultades, basada en la teoría APOS (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) desarrollada por Dubinsky y colaboradores (Arnon *et al*., 2014). El enfoque busca promover la construcción mental progresiva de los conceptos, partiendo de Acciones concretas hasta llegar a la formación de Esquemas cognitivos más avanzados.
La relevancia de este trabajo radica en la necesidad de mejorar la enseñanza de la derivación implícita, un tema que no solo es importante en sí mismo, sino que también sirve como base para conceptos más avanzados en cálculo y ecuaciones diferenciales (Tall, 2012). Además, la comprensión profunda de este tema es crucial para que los futuros ingenieros puedan aplicarlo eficazmente en sus respectivos campos (Roorda *et al*., 2007).

ANTECEDENTES DEL PROBLEMA
2.1 Dificultades y errores comunes
Diversas investigaciones han analizado los errores y dificultades de los estudiantes al trabajar con derivación implícita. Kandeel (2021) identificó dos tipos principales de errores: algebraicos y de cálculo. Los errores algebraicos incluyen problemas para aislar factores comunes, simplificar fracciones y manejar exponentes. Los errores de cálculo se relacionan con la aplicación incorrecta de reglas como la regla de la cadena.

Borji y Martínez-Planell (2020) encontraron que muchos estudiantes carecen de una concepción adecuada de función implícita, lo que dificulta su comprensión de la derivación implícita. También observaron problemas para coordinar las representaciones gráfica y analítica del concepto, lo cual es crucial para una comprensión completa.
Chu (2019) señaló que las dificultades de los estudiantes se deben más a problemas conceptuales que procedimentales, y enfatizó la importancia de desarrollar una comprensión profunda de los conceptos subyacentes. Esta observación es consistente con los hallazgos de Engelbrecht *et al*. (2005), quienes argumentaron que la dependencia excesiva del conocimiento procedimental en la resolución de problemas de cálculo resulta en muchos errores y conceptos erróneos.

2.2 Obstáculos epistemológicos y didácticos
Brousseau (2002) clasificó los obstáculos de aprendizaje en tres categorías: ontogénicos, didácticos y epistemológicos. En el caso de la derivación implícita, se han identificado obstáculos epistemológicos relacionados con la naturaleza misma del concepto. Por ejemplo, la idea de que una ecuación puede definir implícitamente una función es contraintuitiva para muchos estudiantes (Mirin y Zazkis, 2019).
Los obstáculos didácticos, por otro lado, surgen de las prácticas de enseñanza. Bezuidenhout (2001) señaló que los ejercicios de Cálculo excesivamente simplificados que se encuentran en muchos libros de texto a menudo fomentan el pensamiento procedimental a expensas de la comprensión conceptual del Cálculo. Esto es particularmente problemático en el caso de la derivación implícita, donde la comprensión conceptual es crucial.

2.3 Dificultades específicas en ingeniería
En el contexto de la ingeniería, las dificultades con la derivación implícita se magnifican debido a la necesidad de aplicar este concepto en situaciones complejas y contextualizadas. Roorda *et al*. (2007) encontraron que los estudiantes de ingeniería tienen dificultades para aplicar los conceptos de Cálculo en el modelado y las aplicaciones, especialmente en situaciones del mundo real.
Además, Jones (2017) observó que los estudiantes de ingeniería a menudo piensan que la derivación implícita debe requerirse para todas las derivadas aplicadas, lo que sugiere una falta de comprensión de cuándo y por qué se utiliza esta técnica.

LA TEORÍA APOE
La teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) es un marco teórico desarrollado por Ed Dubinsky y sus colaboradores para comprender y explicar cómo los individuos construyen su comprensión de conceptos matemáticos (Arnon *et al*., 2014). Esta teoría se basa en la idea de que el aprendizaje de las matemáticas implica la construcción de estructuras mentales organizadas en cuatro niveles progresivos de complejidad.
El primer nivel es la Acción, donde el individuo percibe una transformación matemática como algo externo y necesita realizar pasos concretos y explícitos para llevarla a cabo. A medida que el individuo reflexiona sobre estas Acciones y las repite, puede interiorizarlas en un Proceso. En este segundo nivel, el individuo puede imaginar y describir los pasos de la transformación sin necesidad de ejecutarlos físicamente. Cuando el individuo es capaz de concebir el Proceso como una totalidad y puede realizar Acciones sobre él, se dice que ha encapsulado el Proceso en un Objeto. Este tercer nivel permite al individuo tratar el concepto como una entidad sobre la cual se pueden aplicar nuevas transformaciones.

Finalmente, el nivel más avanzado es el Esquema, que representa una colección coherente de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas, junto con las relaciones entre ellos. Un Esquema permite al individuo decidir qué conceptos y procedimientos son relevantes para resolver un problema matemático particular. La teoría APOE sugiere que el aprendizaje efectivo de las matemáticas implica el desarrollo de estas estructuras mentales de manera progresiva, y que la enseñanza debe diseñarse para facilitar esta construcción mental. Esta teoría ha sido aplicada con éxito en la investigación y enseñanza de diversos conceptos matemáticos, incluyendo temas de Cálculo (Asiala *et al*., 1997; Clark *et al*., 1997).

LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA Y SU JUSTIFICACIÓN

4.1 Acciones iniciales

- Graficar ecuaciones implícitas usando software como GeoGebra o Desmos.
- Identificar visualmente intervalos donde y es función de x en estas gráficas.
- Calcular valores de y para x dados en ecuaciones implícitas simples.
- Trazar tangentes a curvas implícitas en puntos específicos.

Justificación: Estas actividades concretas permiten a los estudiantes familiarizarse con las funciones implícitas y su comportamiento gráfico, abordando la falta de comprensión visual identificada por Borji y Martínez-Planell (2020).

4.2 Interiorización en Procesos

- Imaginar gráficas de ecuaciones implícitas sin graficarlas.
- Describir verbalmente el comportamiento local de y como función de x.
- Sustituir simbólicamente f(x) por y en ecuaciones implícitas y derivar.
- Explicar el significado geométrico de dy/dx en una curva implícita.

Justificación: Estas actividades promueven la interiorización de las Acciones en Procesos mentales, permitiendo a los estudiantes pensar en las funciones implícitas y sus derivadas de manera más abstracta y flexible.

4.3 Encapsulación en Objetos

- Aplicar derivación implícita a ecuaciones más complejas.
- Interpretar geométricamente la derivada implícita en diferentes puntos de una curva.
- Resolver problemas de aplicación que involucren derivación implícita.
- Comparar y contrastar la derivación implícita con la derivación explícita.

Justificación: La encapsulación de los Procesos en Objetos permite a los estudiantes tratar la derivación implícita como una entidad en sí misma, sobre la cual pueden realizar Acciones y reflexionar.

4.4 Construcción de Esquemas

- Coordinar los Procesos gráfico y analítico de función implícita.
- Relacionar derivación implícita con otros conceptos (regla de la cadena, derivadas parciales, etc.).
- Justificar los procedimientos de derivación implícita.
- Aplicar derivación implícita en problemas complejos de ingeniería.

Justificación: La construcción de Esquemas permite a los estudiantes integrar su comprensión de la derivación implícita con otros conceptos de Cálculo y aplicarla en situaciones diversas y complejas.

Esta secuencia se justifica en que promueve la construcción progresiva de los conceptos, partiendo de Acciones concretas hasta llegar a Esquemas mentales más avanzados. Se enfatiza la coordinación entre lo gráfico y analítico, aspecto clave según investigaciones previas (Asiala *et al*., 1997; Zandieh, 2000).

DISCUSIÓN Y SUGERENCIAS DE IMPLEMENTACIÓN

La propuesta busca abordar las principales dificultades identificadas en la literatura:

- Desarrolla una concepción adecuada de función implícita mediante actividades gráficas y analíticas, abordando la falta de comprensión señalada por Borji y Martínez-Planell (2020).
- Promueve la coordinación entre representaciones, esencial según Zandieh (2000) y Asiala *et al*. (1997).
- Enfatiza la comprensión conceptual, no solo procedimental, como sugieren Chu (2019) y Engelbrecht *et al*. (2005).
- Aborda explícitamente errores comunes algebraicos y de cálculo identificados por Kandeel (2021).
- Contextualiza la derivación implícita en problemas de ingeniería, atendiendo a las dificultades señaladas por Roorda *et al*. (2007) y Jones (2017).

Para su implementación en el aula se sugiere:

- Uso de tecnología: Utilizar software de graficación como GeoGebra o Desmos para visualizar ecuaciones implícitas y sus derivadas. Esto permite a los estudiantes explorar dinámicamente las relaciones entre las representaciones gráfica y analítica (Infante, 2007).
- Aprendizaje activo: Promover discusión en grupos pequeños sobre los conceptos y procedimientos. El aprendizaje colaborativo ha mostrado ser efectivo en la comprensión de conceptos matemáticos avanzados (Cottrill, 1999).
- Contextualización: Plantear problemas contextualizados de ingeniería que requieran el uso de derivación implícita. Esto ayuda a los estudiantes a ver la relevancia del concepto y mejora su capacidad para aplicarlo en situaciones reales (Willcox y Bounova, 2004).
- Evaluación integral: Evaluar no solo la habilidad procedimental, sino también la comprensión conceptual y la capacidad de aplicar la derivación implícita en diversos contextos. Esto puede incluir explicaciones verbales, interpretaciones geométricas y resolución de problemas complejos (Siyepu, 2015).
- Retroalimentación continua: Proporcionar retroalimentación detallada sobre errores comunes, tanto algebraicos como conceptuales. La retroalimentación efectiva es crucial para corregir conceptos erróneos y reforzar la comprensión correcta (Hattie y Timperley, 2007).
- Construcción gradual: Introducir los conceptos de manera gradual, comenzando con ecuaciones simples y avanzando hacia casos más complejos. Esto permite a los estudiantes construir su comprensión de manera progresiva, de acuerdo con la teoría APOS (Arnon *et al*., 2014).
- Reflexión metacognitiva: Fomentar la reflexión de los estudiantes sobre su propio proceso de aprendizaje. Esto puede incluir la elaboración de diarios de aprendizaje o discusiones en clase sobre estrategias de resolución de problemas (Schoenfeld, 1992).

La principal ventaja de este enfoque es que promueve una comprensión más profunda y duradera, al enfocarse en la construcción mental de los conceptos. Esto debería resultar en una mejor retención y aplicación del conocimiento a largo plazo. Además, al abordar explícitamente las dificultades comunes y los obstáculos epistemológicos, se espera reducir la frecuencia de errores y conceptos erróneos.

Sin embargo, es importante reconocer que este enfoque requiere más tiempo y esfuerzo que un enfoque puramente procedimental. Los instructores necesitarán adaptar sus planes de estudio y posiblemente reducir la cantidad de contenido cubierto para permitir un aprendizaje más profundo. Además, la implementación efectiva de este enfoque requiere que los instructores estén familiarizados con la teoría APOS y sean capaces de guiar a los estudiantes a través del proceso de construcción mental.

CONCLUSIONES Y FUTURAS DIRECCIONES

La derivación implícita es un concepto crucial en el Cálculo para ingeniería, pero ha demostrado ser un desafío significativo para muchos estudiantes. La propuesta presentada en este artículo, basada en la teoría APOS, ofrece un enfoque estructurado para abordar las dificultades comunes y promover una comprensión más profunda del concepto.

Al enfatizar la construcción gradual de comprensión, desde Acciones concretas hasta Esquemas mentales complejos, y al integrar representaciones gráficas y analíticas, este enfoque tiene el potencial de mejorar significativamente el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, se necesita más investigación para evaluar empíricamente la efectividad de esta propuesta.

Futuras investigaciones podrían incluir estudios experimentales que comparen este enfoque con métodos de enseñanza más tradicionales, así como investigaciones longitudinales para evaluar la retención a largo plazo y la transferencia de conocimientos. Además, sería valioso explorar cómo este enfoque podría adaptarse a diferentes contextos educativos, incluyendo el aprendizaje en línea y los cursos de Cálculo para no ingenieros.

En última instancia, el objetivo es equipar a los futuros ingenieros con una comprensión sólida y flexible de la derivación implícita, permitiéndoles aplicar este concepto de manera efectiva en sus futuros estudios y carreras profesionales.

AGRADECIMIENTOS: A la Facultad de Ciencias de la Ingeniería de la Universidad Austral de Chile y a la Agencia Nacional de Investigación (ANID) que financia este trabajo por medio del proyecto Fondecyt Regular N° 1241700.

REFERENCIAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., y Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399-431.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(4), 487-500.

Borji, V., y Martínez-Planell, R. (2020). On students' understanding of implicit differentiation based on APOS theory. *Educational Studies in Mathematics*, *105*, 163-179.

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Chu, C. G. (2019). *Investigation of student understanding of implicit differentiation* (Master's thesis). University of Maine, Orono, ME.

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St. John, D., Tolias, G., y Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule? *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 345-364.

Cottrill, J. F. (1999). *Students' understanding of the concept of chain rule in first year calculus and the relation to their understanding of composition of functions* (Doctoral dissertation). Purdue University.

Engelbrecht, J., Harding, A., y Potgieter, M. (2005). Undergraduate students' performance and confidence in procedural and conceptual mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *36*(7), 701-712.

Hattie, J., y Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, *77*(1), 81-112.

Infante, N. E. (2007). *Students' understanding of related rates problems in calculus* (Doctoral dissertation). Arizona State University.

Jones, S. R. (2017). *An exploratory study on student understandings of derivatives in real-world, non-kinematics contexts*. *The Journal of Mathematical Behavior*, *45*, 95-110.

Kandeel, R. A. A. (2021). Learners' common errors in implicit differentiation: An analytical study. *Journal of Educational Research and Reviews*, *9*(7), 198-207.

Mirin, A., y Zazkis, D. (2019). Making implicit differentiation explicit. In A. Weinberg, D. Moore-Russo, H. Soto, y M. Wawro (Eds.), *Proceedings of the 22nd Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 792-800). Oklahoma City, OK.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 235-250.

Roorda, G., Vos, P., y Goedhart, M. (2007). Derivatives and applications; development of one student's understanding. *In Proceedings of CERME* (Vol. 5, pp. 2190-2199).

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). MacMillan.

Siyepu, S. (2015). Analysis of errors in derivatives of trigonometric functions. *International Journal of STEM Education*, *2*(1), 1-16.

Tall, D. (2012). A sensible approach to the calculus. *In Handbook on calculus and its teaching. World Scientific*.

Tarmizi, R. A. (2010). Visualizing students' difficulties in learning calculus. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *8*, 377-383.

Willcox, K., y Bounova, G. (2004). Mathematics in engineering: Identifying, enhancing and linking the implicit mathematics curriculum. *In Proceedings of the 2004 American Society for Engineering Education Annual Conference y Exposition* (pp. 1-11).

Zandieh, M. J. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *Research in Collegiate Mathematics Education IV*, *8*, 103-127.